MAT 1 TLC $\boxed{\text{ORA 39}}$

Titolo nota 04/11/2006

Teo. esistenza degli zeri e questioni collegate

Teo. WEIERSTRASS

— o — o —

$\boxed{\text{TEO. ESISTENZA DEGLI ZERI}}$

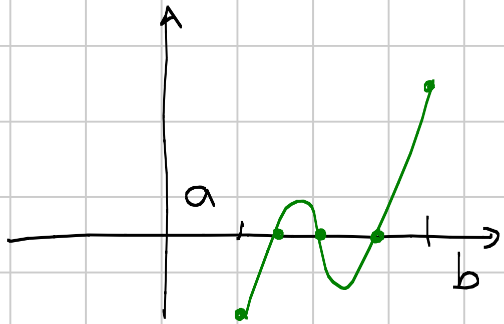
Sia data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo

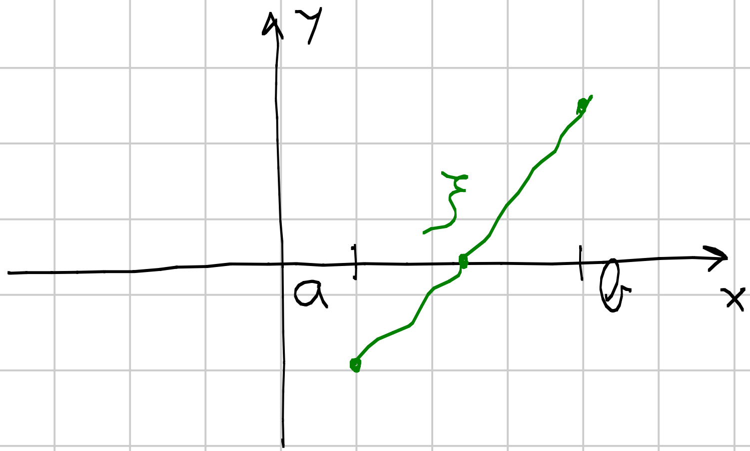
* $f$ continua
* $f(a) \cdot f(b) < 0$

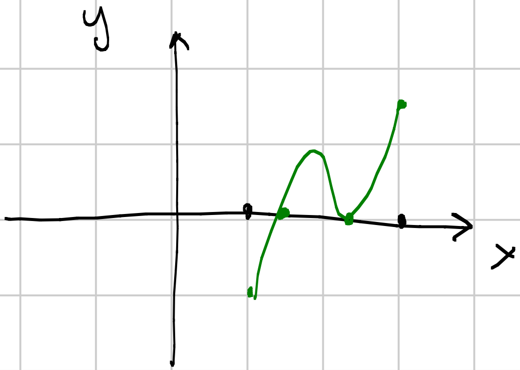
cioè $\underbrace{f(a) \text{ e } f(b)}_{\text{valori agli estremi}}$ hanno segno DIVERSO

Allora $\exists\, \xi \in\, ]a,b[$ tale che $f(\xi) = 0$

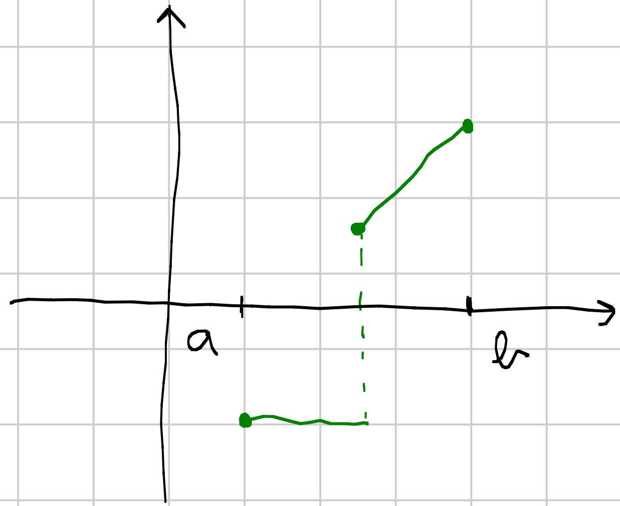
**Oss.** $\xi$ non è detto che sia unico



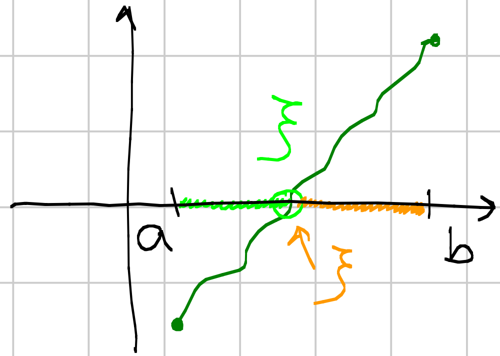

È fondamentale che $f$ sia continua



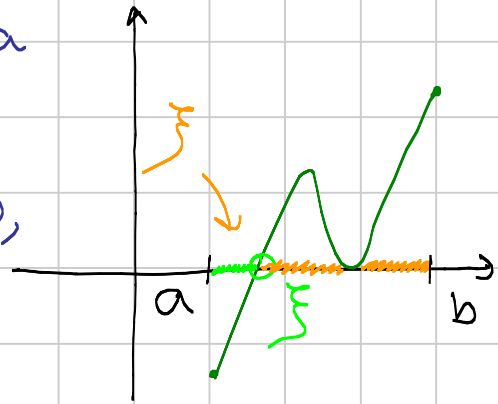
"Dim. (idea)" si usano pesantemente le propr. dei reali nel senso che si usano inf o sup

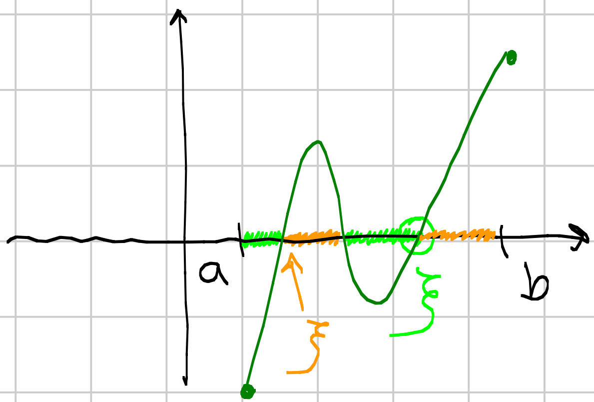
Supponiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

$$\xi = \sup \{ x \in [a,b] : f(x) < 0 \}$$




$f(\xi)$ → $f(\xi) < 0$, ma allora un po' dopo $\xi$ $f$ sarebbe ancora $<0$, dunque $\xi$ non sarebbe il sup




$f(\xi) > 0$, ma allora già un po' prima di $\xi$ $f$ sarebbe stata $> 0$, e quindi non potrebbe essere il sup.

Resta solo la possibilità $f(\xi) = 0$

— o —

<u>Oss.</u> Si può definire $\xi$ usando l'inf

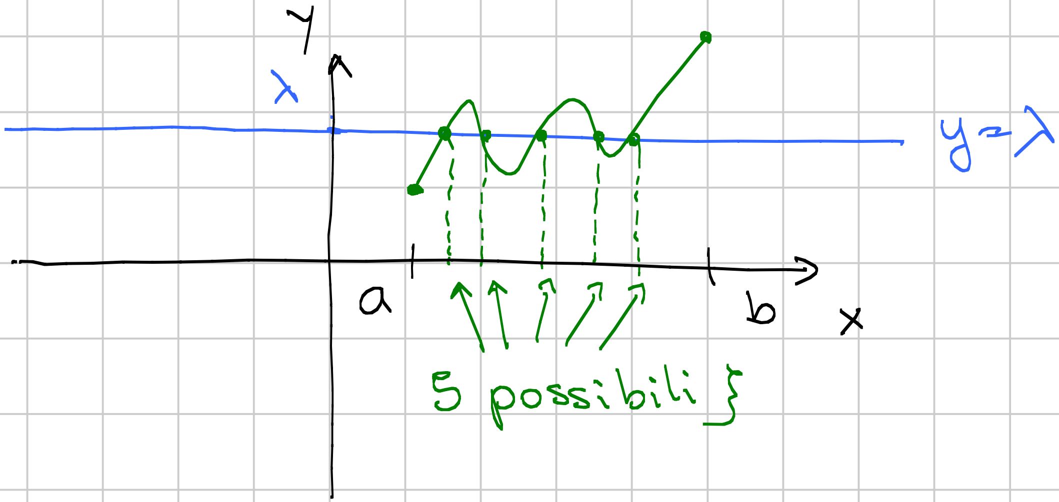
$$\xi = \inf \{ x \in [a, b] : f(x) > 0 \}$$

Può essere diverso dal precedente, ma va bene lo stesso

__Prima generalizzazione__. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua.

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) < \lambda < f(b)$.

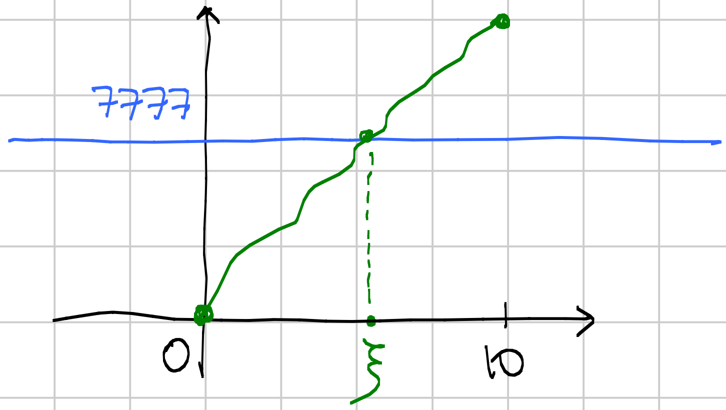
Allora $\exists\, \xi \in \,]a, b[$ tale che $f(\xi) = \lambda$.




__Esercizio__ 1 Dimostrare che l'eq $x^7 - x = 7777$ ha almeno una soluzione reale.

Prendo $f(x) = x^7 - x$, $\quad f(0) = 0 < 7777$

$f(10) = 10.000.000 - 10 > 7777$




$f$ continua

$\Rightarrow$ esiste almeno un p.to

$\xi \in (0, 10)$ t.c. $f(\xi) = 7777$

Esercizio 2 Dire se esistono soluzioni dell'eq.

$$x^{44} + \sin x^{88} + x^{20} \arctan x^3 + \log(1+x^2) = 2006$$

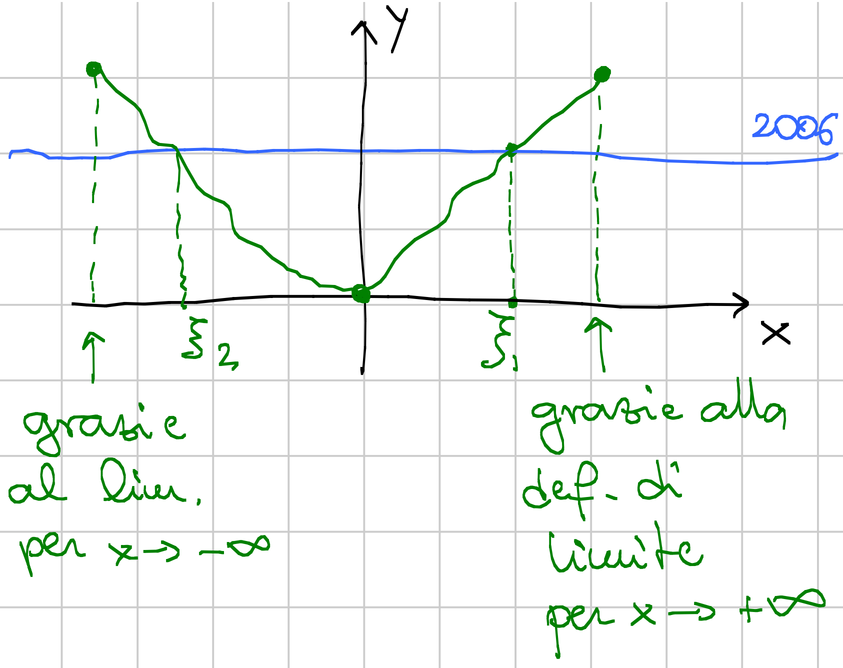
Dimostriamo che ci sono almeno 2 soluzioni. Chiamo $f(x)$ la funzione a sinistra. $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

$f(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \implies$$

per $x$ abbastanza grandi $f(x) > 2006$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



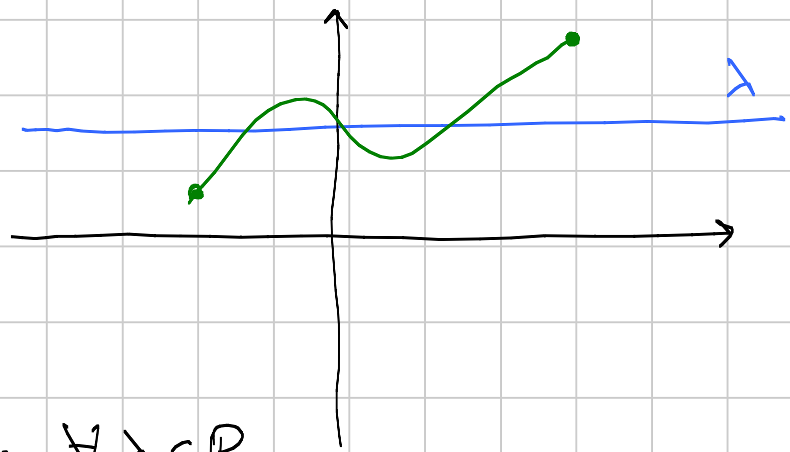

**Esercizio 3** Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^7 - x^5 \sin x + \arctan x^{12}$$

$f$ è surgettiva ? [ Surgettiva $\iff$ il grafico incontra ogni // asse $x$ in almeno 1 p.to ]

E' equivalente a chiedersi se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'eq.

$f(x) = \lambda$ ha almeno 1 soluz.




$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right]$$

segue che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
esiste almeno un p.to
$x_1$ in cui $f(x_1) > \lambda$ e
almeno un p.to $x_2$ in
cui $f(x_2) < \lambda$

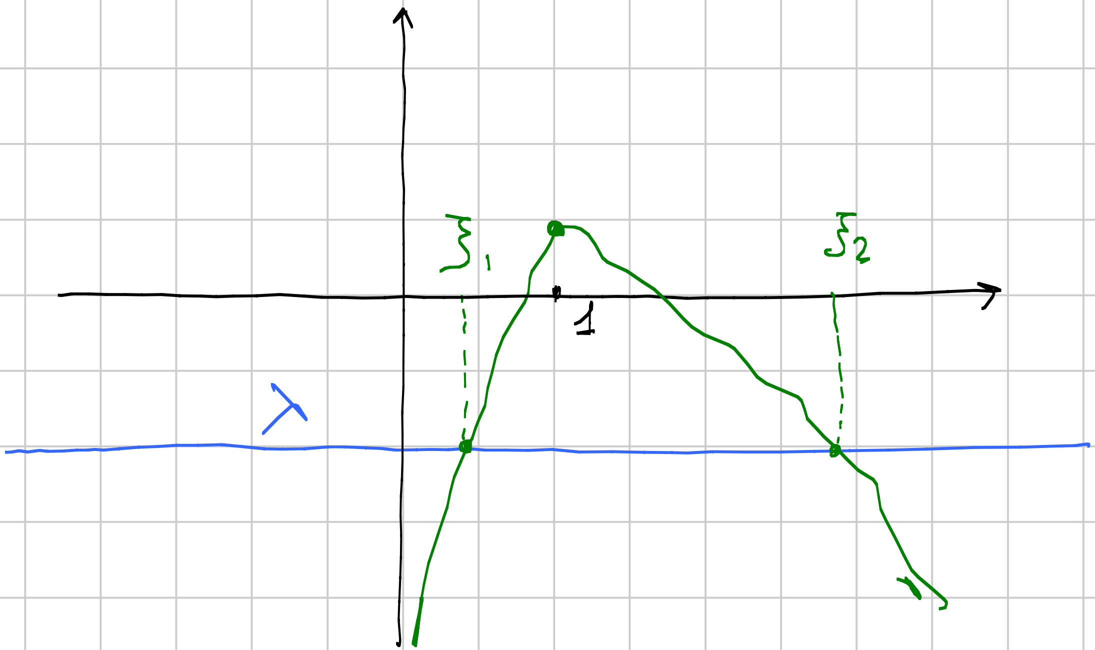
$f$ è SURGETTIVA.

## Esempio 4

$f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \log x - x^{30} + x^4 \arctan e^x$$

È iniettiva? No!




$f$ continua,

$f(1) = -1 + \arctan e$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

Preso un qualunque $\lambda < f(1)$ esistono 2 pti $\xi_1$ e $\xi_2$ in cui $f = \lambda$

$\xi_1 \in (0,1)$, $\xi_2 > 1$

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA } 40}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$.

Def. Dico che $M \in \mathbb{R}$ è il max di $f$ in $A$, e scrivo

$$M = \max \{ f(x) : x \in A \}$$

Massima quota raggiunta dalla funzione in $A$

se

(i) $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$

(ii) esiste $x \in A$ t.c. $f(x) = M$

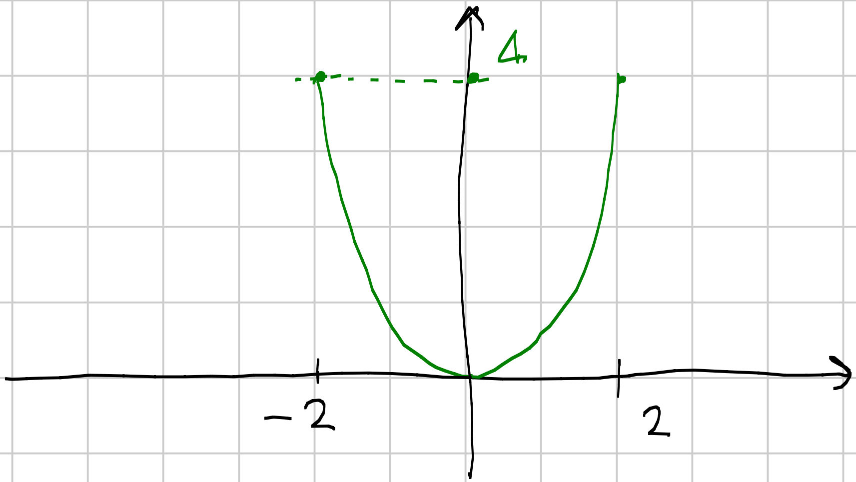
Tutti i punti $x$ in cui $f(x) = M$ si dicono

PUNTI DI MASSIMO

IDEM per minimo e p.ti di minimo

## Esempio 1

$$\max\{x^2 : x \in [-2, 2]\} = 4$$




p.ti di max: $x = 2$ e $x = -2$

$$\min\{x^2 : x \in [-2, 2]\} = 0$$

p.to di min: $x = 0$

**Oss.** max e min NON sono obbligati ad esistere

**Esempio** $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \arctan x$

$\max \{ \arctan x : x \in [0, +\infty) \}$ N.E.

$\sup \{ \quad \text{"} \quad \} = \pi/2$


$\min \{ \arctan x : x \in [0, +\infty) \} = 0$

$\inf \{ \quad \text{"} \quad \} = 0$

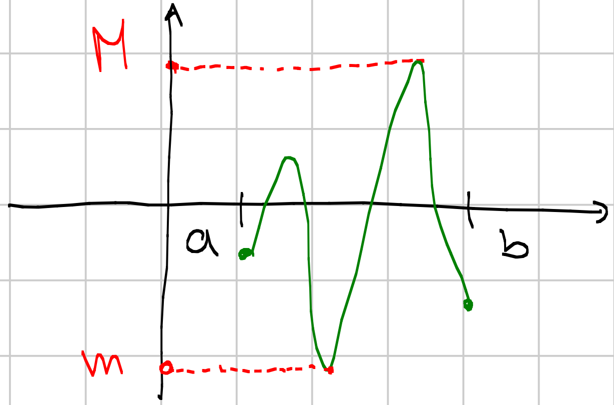
p.to di min: $x = 0$.

---

$\boxed{\text{TEOREMA WEIERSTRASS}}$ Sia $f : \boxed{[a,b]} \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{continua}}$

intervallo compresi gli estremi

Allora $\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \{ f(x) : x \in [a,b] \}$ esistono PER FORZA.




$\boxed{NB}$ Max e min sono per forza unici (quando esistono)

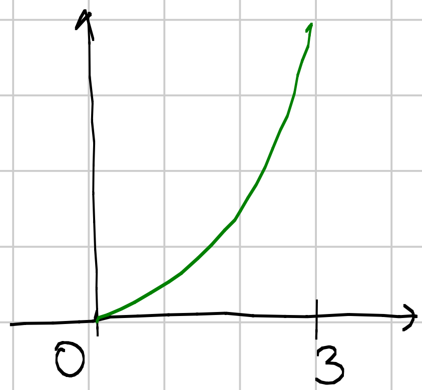
I p.ti di max e min possono essere + di uno.

— o — o —

<u>Oss 1</u> È importante che l'intervallo contenga entrambe gli estremi.

<u>Es.</u>

$$\max\{x^2 : x \in [0,3)\} \text{ N.E.}$$
$$\sup\{\quad\} = 9$$
$$\min\{\quad\} = 0$$
$$\inf\{\quad\} = 0$$




p.to di min $x=0$

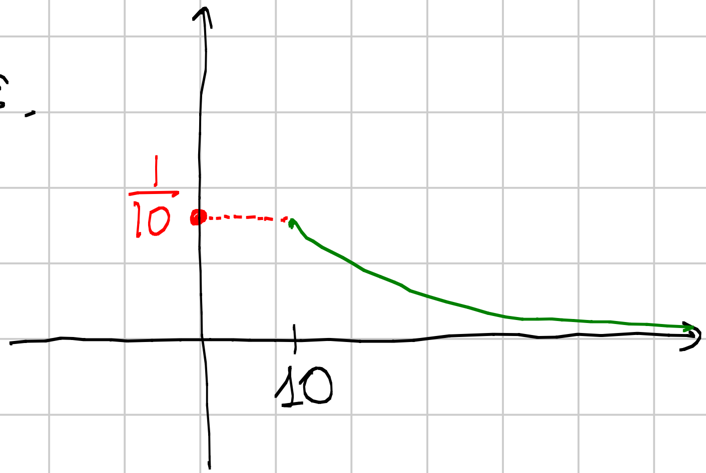
**Oss. 2** È importante che l'intervallo sia limitato

**Es.** $\min \left\{ \frac{1}{x} : x \geq 10 \right\}$ N.E.

$\inf \{ \quad \} = 0$

$\max \{ \quad \} = \frac{1}{10}$

$\sup \{ \quad \} = \frac{1}{10}$




p.to di max: $x = 10$

**Esempio 1** Domanda: esiste $\max \left\{ \underbrace{e^{\sin x} - x^8}_{f(x)} : x \in \boxed{[0, 12]} \right\}$ ?

SI ; $f(x)$ continua

intervallo con estremi $\overset{w}{\Longrightarrow}$ ESISTE

Esempio 2 Esiste $\max\{\cos x : x \in \boxed{(-1,1)}\}$ ? SI !

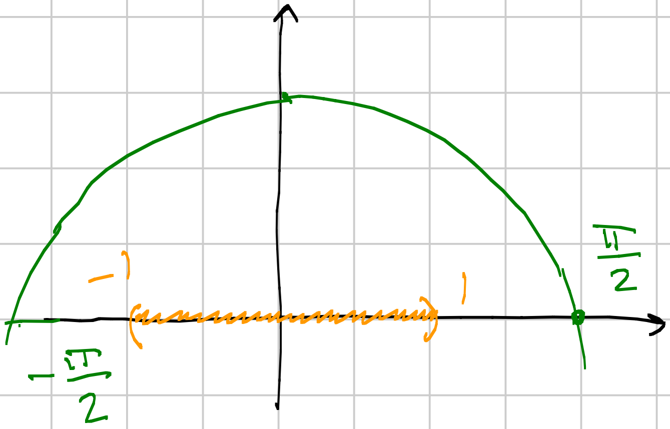
senza estremi

$\Downarrow$

Hp W non verificate

$\Downarrow$

BOH




max = 1 , p.to di max : $x=0$

Prima estensione Esiste

$$\max\{\underbrace{e^{\sin x} + \sin^8(3x) + \log(5+\cos x)}_{f(x)\ \text{PERIODICA CONTINUA}} : \boxed{x \in \mathbb{R}}\}$$

Hp W NO

$f(x)$ PERIODICA
CONTINUA

$f(x+2\pi) = f(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}$

Consideriamo $\max\{f(x) : x \in [0,2\pi]\} = M$

esiste per W

Dico che $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = M$ (stesso $M$)

perchè ogni valore che $f(x)$ assume al variare di $x \in \mathbb{R}$ lo assume già al variare di $x \in [0,2\pi]$.

— o — o —

<u>Seconda estensione</u>

$$\max_{\min}\left\{ x^{22} - \arctan x^{15} + x^3 \cos x \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

max N.E. $\quad \sup = +\infty$ (basta fare $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$)

Dico che min ESISTE

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

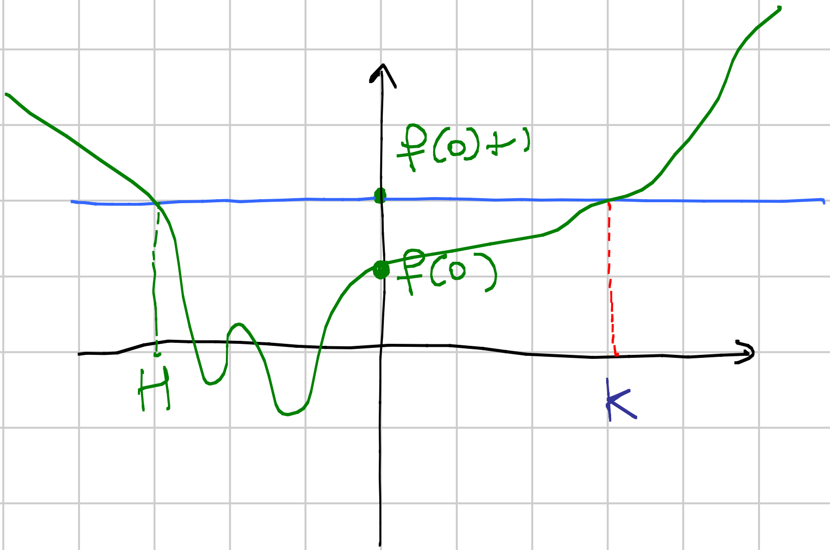

$\boxed{\text{W ESTESO}}$ Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$

esiste PER FORZA.

$\boxed{\text{Dim. W esteso}}$ Prendo $f(0)$




$f(x) \geq f(0) + 1$ per ogni $x \geq K$

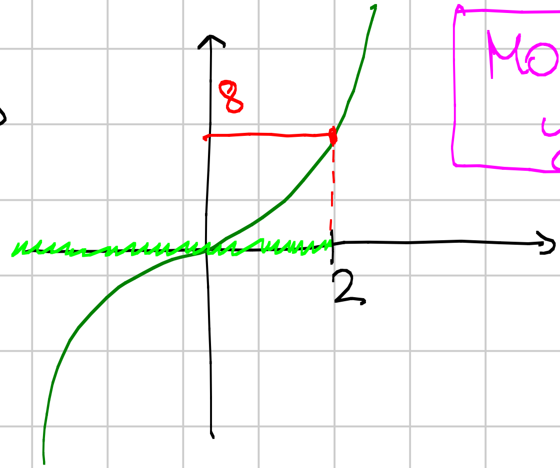
$f(x) \geq f(0) + 1$ " " $x \leq H$

Quindi il minimo viene deciso tra $[H, K]$ e qui vale $W$.

— o — o —

$$\boxed{\max\{x \in \mathbb{R} ; x^3 \leq 2\} = \sqrt[3]{2}}$$

$$\max\{x^3 ; x \leq 2\} = 8 \rightarrow$$

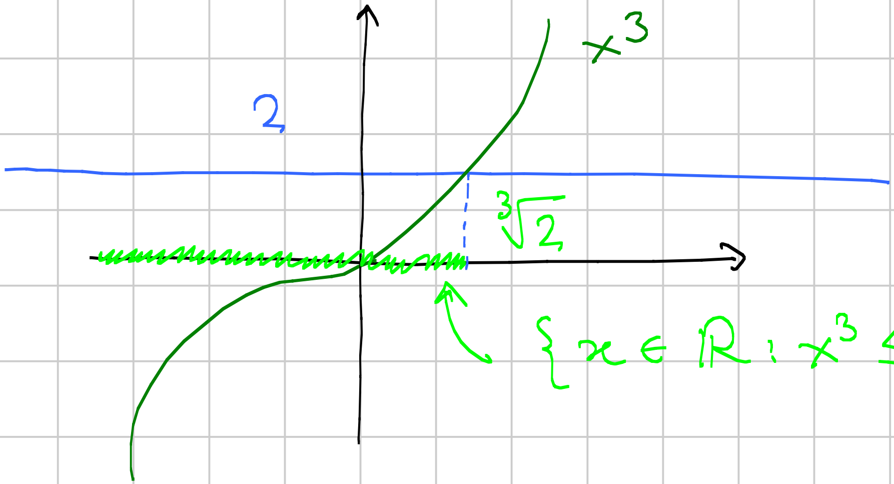



$\boxed{\text{MONDO } y}$

Trovare il max di $f(x) = x^3$ al variare di $x \leq 2$.

Trovare il max degli $x$ il cui cubo è $\leq 2$.

= Risolvi la diseq $x^3 \leq 2$, trovi $x \leq \sqrt[3]{2}$ e prendi il max dell'insieme




$\{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq 2\}$

MONDO X