MAT 1 TLC

ORA 37

Titolo nota 02/11/2006

Serie di potenze - SERIE DI TAYLOR

$\boxed{\text{SERIE DI POTENZE}}$

polinomio di grado ∞.

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{\text{coeff. } c_n,\ \text{parametro } x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

Domande:

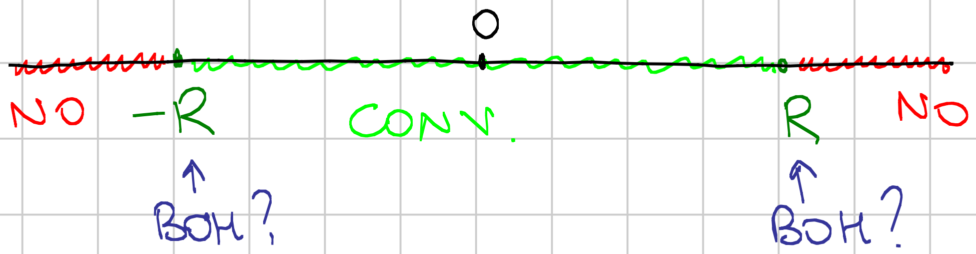
1. Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?
2. Quando converge, posso calcolare il valore a cui conv. (in funzione di x?)

Convergenza delle serie di potenza.

<u>Oss. banale</u>: per $x=0$ la serie converge e la somma fa c_0

$\boxed{\text{TEOREMA 1}}$ (Raggio di convergenza) Data una qualunque serie di potenze, esiste $R \in [0, +\infty]$ ← può anche valere $+\infty$ con questa proprietà

- per ogni $|x| < R$ $(-R < x < R)$ la serie converge
- per ogni $|x| > R$ $(x > R$ oppure $x < -R)$ la serie non converge ed anzi non verifica nemmeno la cond. nec.
- per $|x| = R$ $(x = \pm R)$ dipende dai casi (i ciascuno dei 2 casi $x = R$ e $x = -R$ può conv. o non conv.)



<u>Oss.</u> Se $R = +\infty$ si intende che la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$
Se $R = 0$ allora la serie converge soltanto per $x = 0$
(in $x=0$ converge perché convergono tutte).

$\boxed{\text{TEOREMA 2}}$ (Formula per calcolare il raggio di conv.)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze. Supponiamo che esista

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

[È escluso dal teo. 2 il caso in cui tale limite non esiste]

Allora

$$R = \frac{1}{L}$$ (si intende che se $L=0$, allora $R=+\infty$, se $L=+\infty$, allora $R=0$)

— o — o —

Esempio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$ [In questo caso $a_n = \frac{1}{n^2}$]

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \longrightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Quindi la serie

- converge per $-1 < x < 1$
- non conv. per $|x| > 1$

In $x = \pm 1$ controllo "a mano"

$x = 1 \rightsquigarrow \sum \frac{1}{n^2}$ conv. perché arm. gen. con $\alpha = 2$

$x = -1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge per Leibnitz o per assoluta convergenza

Conclusione: la serie converge $\iff x \in [-1, 1]$

— o — o —

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ [in questo caso $a_n = \frac{1}{n}$]

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 = L \implies R = \frac{1}{L} = 1$

Controllo gli estremi $x = \pm 1$.

$x = 1 \rightsquigarrow \sum \frac{1}{n}$ quindi diverge

$x = -1 \rightsquigarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge per Leibnitz

Conclusione: la serie converge $\iff x \in [-1, 1[$

Esempio 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}}}_{a_n} x^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n}\,\frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{1+\frac{n^3}{3^n}}} = \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{2^n}}}{\sqrt[n]{1+\frac{n^3}{3^n}}} \to \frac{2}{3} = L$$

$$\frac{n^2}{2^n} \to 0, \qquad \frac{n^3}{3^n} \to 0$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{3}{2}$$

Controllo "a mano" $x = \pm\frac{3}{2}$

$$x = \frac{3}{2} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}\cdot\frac{3^n}{2^n}}}_{a_n}$$

$a_n \geq 0$ sempre

$a_n \to 1 \Rightarrow$ no cond. nec.

$\Downarrow$

diverge a $+\infty$

$$x = -\frac{3}{2} \leadsto \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{(-1)^n \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3} \cdot \frac{3^n}{2^n}}}_{a_n}$$

$a_{2n} \to 1$
$a_{2n+1} \to -1$

$\Rightarrow \lim a_n$ N.E.
$\Downarrow$
No cond. nec.
$\Downarrow$
non conv.

Conclusione: la serie converge $\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

Esempio 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{5^n+7^n}{n^{35}-n!}}}_{a_n} x^n$$

a_n definitivamente è NEGATIVO (il num. è sempre >0, al den. $n!$ definitiv. prevale su n^{35}. Den. $\to -\infty$)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{5^n+7^n}{n!-n^{35}}} \longrightarrow \underset{L}{\overset{\shortparallel}{0}}$$

almeno defin.

[Brutalmente è
$$\sim \sqrt[n]{\frac{7^n}{n!}} = \frac{7}{\sqrt[n]{n!}} \to \frac{7}{+\infty}$$]

$\Rightarrow R = +\infty \quad \left(\frac{1}{L}\right)$ Conclusione: la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

— o — o —

$\boxed{\text{Dim. TEO 2}}$ Hp. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} c_n x^n \qquad \sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow L$

Controllo la condiz. nec. $c_n x^n \xrightarrow{?} 0$ il che è equivalente a dire che

$$|c_n x^n| \xrightarrow{?} 0$$

$$|c_n| \cdot |x|^n \xrightarrow{?} 0$$

Provo a fare il limite con criterio radice

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \sqrt[n]{|c_n|} \longrightarrow |x| \cdot L$$

Se $|x| \cdot L > 1$, cioè se $|x| > \frac{1}{L}$, allora $|c_n| \cdot |x|^n \to +\infty$, dunque non tende a zero, dunque NO condiz. nec., dunque la serie NON converge

Se invece $|x| \cdot L < 1$, cioè se $|x| < \frac{1}{L}$, allora $|c_n| \cdot |x|^n \to 0$

Non solo. Per il criterio della radice applicato alle serie, si ha che

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |x|^n$ converge, ma allora anche

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge per assoluta convergenza.

— o — o —

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 38}}$

Serie di Taylor. Data una funzione $f(x)$ derivabile infinite volte nel p.to $x=0$ posso costruire la sua serie di Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}}_{c_n} x^n$$

è la serie che ha come somme parziali i polinomi di Taylor della funzione $f(x)$

* Per quali x converge? All'interno del raggio di conv. (+ event. estremi)
* A cosa converge? → $\boxed{\text{Sarebbe bello}}$ che convergesse a $f(x)$

$$\boxed{f(x) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

Se mi fermo dopo n termini ho un resto "piccolo". Se invece sommo tutti gli infiniti termini (serie) ottengo esattamente $f(x)$.

Def. La funzione $f(x)$ si dice ANALITICA se vale l'uguaglianza, cioè se $f(x)$ è uguale alla somma della sua serie di Taylor.

TEOREMA 3 Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante op. alg. e/o comp. sono analitiche se non hanno problemi in $x=0$. In particolare vale l'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n} x^n$$

Per gli x per cui la SERIE CONVERGE

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$ converge (radice, rapporto).
Quanto fa la somma?

Questa serie è il caso particolare $x=7$ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Questa è la serie di Taylor di $f(x) = e^x$

Per i valori di x per i quali la serie converge si ha che la somma è ESATTAMENTE e^x. Quindi nel nostro caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} = e^7$$

PORCHÈ IN $x=7$ LA SERIE CONVERGA, cosa che sappiamo già.

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

Converge per LEIBNITZ

Questa è il caso $x = -1$ della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Assomiglia a qualche sviluppo noto?

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ è la serie di Taylor di $-\log(1-x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

per tutti i valori di x per cui la serie converge, in particolare per $x=-1$

$x \rightsquigarrow -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$$

$$= \log \frac{1}{2}$$

— o — o —

Esempio 3

$$2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^7}{7} + \frac{2^9}{9} - \dots \boxed{= \arctan 2}$$

NOOOOOOO

Caso $x=2$ della serie di potenze

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x$$

Questa uguaglianza vale per tutti i valori di x per cui la serie converge

In $x=2$ la serie <u>non</u> converge.

$$2-\frac{2^3}{3}+\frac{2^5}{5}-\frac{2^7}{7} = \sum \boxed{(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1}}$$

a_n

$a_{2n} \to +\infty$

$a_{2n+1} \to -\infty$

$\Rightarrow$ a_n NON ha limite $\Rightarrow$ No condiz. nec.

$\Downarrow$

la serie NON converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Per quali x converge?

$$= x \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}}$$

Se chiamo $y = x^2$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{2n+1}$$

Questa in y è una serie di potenze con $c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} \longrightarrow 1 = L \implies R = \frac{1}{L} = 1$$

Quindi la serie in y converge di sicuro per $|y| < 1$,
quindi quella in x converge di sicuro per $|x^2| < 1$

$$\Updownarrow$$

$$x \in (-1, 1) \iff x^2 < 1$$

Il raggio di convergenza della serie con l'arctan è 1.

Cosa succede in $x = 1$? $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ Questa converge per Leibnitz

Ma allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

<u>Esempio 3±1</u>

$$5 + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^9}{9!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh 5 = \frac{e^5 - e^{-5}}{2}.$$

Caso $x = 5$ di

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7} + \dots = \sinh x$$

Per quali x si ha uguaglianza? Per tutti gli x per cui la serie converge

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Converge $\forall x \in \mathbb{R}$ (Fare criterio rapporto)