MAT 1 TLC

ORA 35

Titolo nota 28/10/2006

SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE

- CRITERIO LEIBNITZ (serie a segno alterno)
- ASSOLUTA CONVERGENZA

LEIBNITZ Consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{(-1)^n \alpha_n}}_{a_n}$. Supp. che

(i) $\alpha_n \geq 0$ definit. (cioè a_n ha segno alterno)

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ definit.

(iii) $\alpha_n \to 0$

Allora la serie converge.

Esempio 1
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

In questo caso $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Controllo le Hp:

(i) $\alpha_n \geq 0$ $\quad \frac{1}{n} \geq 0$ sì!

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ $\quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ Ok

(iii) $\alpha_n \to 0$ $\quad \frac{1}{n} \to 0$ sì

$\Rightarrow$ La serie converge.

Esempio 1.1 Stessa vale per le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$$

Nell' ultimo caso $\alpha_n = \frac{1}{\log n}$

(i) $\frac{1}{\log n} \geq 0$ sì

(iii) $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\log n} = 0$

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$; $\frac{1}{\log(n+1)} \overset{?}{\leq} \frac{1}{\log n} \iff$

$\log n \overset{?}{\leq} \log(n+1)$ Ok perché $\log x$ è crescente

---

Oss. Se le ipotesi non sono verificate?

Se non sono verificate (i) e/o (ii), allora BOH

Se non è verificata (iii) allora non è verificata la cond. nec., dunque di SICURO la serie non converge (e quindi può div. a $\pm\infty$, oppure essere INDETERMINATA).

(iii) $\alpha_n \to 0$. Condiz. nec.: $a_n \to 0$

$a_n = (-1)^n \alpha_n$. Se $a_n \to 0$, allora $|a_n| \to 0$,
ma allora $|\alpha_n| \to 0$

$a_n \to 0 \Rightarrow |a_n| \to 0 \Rightarrow |\alpha_n| \to 0 \Rightarrow \alpha_n \to 0$

visto a suo tempo:
una succ. tende a 0
$\Updownarrow$
il suo val. ass. $\to 0$

Esempio $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n+4}{n+7}}_{\alpha_n}$

$\alpha_n \to 1 \Rightarrow$ ipotesi (iii) non verificata $\Rightarrow$ NO COND NEC.

$\Downarrow$

La serie NON CONVERGE

Cosa fa il limite di $a_n = (-1)^n \alpha_n$?

Non esiste: infatti $a_{2n} \to 1$ e $a_{2n+1} \to -1$

ASSOLUTA CONVERGENZA Data la serie $\sum a_n$, studio $\boxed{\sum |a_n|}$. Allora

È una serie a termini ≥ 0, dunque ho + criteri a disposizione!

$$\sum |a_n| \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$$

$\boxed{\text{ACHTUNG}}$ $\sum |a_n| = +\infty \Longrightarrow$ BOH.

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\cos n}{n^2}} = a_n$ a_n segni qualunque

Proviamo con l'assoluta conv., e studiamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$

$$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ conv. (arm. con $\alpha = 2$) $\Longrightarrow \displaystyle\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ conv.

confronto tra serie a termini ≥ 0

$\Downarrow$ ASSOL. CONV.

$\displaystyle\sum \frac{\cos n}{n^2}$ conv.

$$\frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \sum \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum \frac{\cos n}{n^2} \text{ conv.}$$

No perché il confronto vale SOLO tra serie a termini ≥ 0.

— o —

Esempio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^2+8-7n}{n^4-25n^2+14}} \quad a_n$$

Uso Leibnitz. Verifico ipotesi.

(i) $a_n \geq 0$ def. OK (Num e den $\to +\infty$, dunque def. sono >0)

(iii) $a_n \to 0$ OK

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ DISEQ. POCO PIACEVOLE

Proviamo con assol. conv. $\quad a_n = (-1)^n \alpha_n$

Studio $\sum |a_n| = \sum \frac{n^2+8-7n}{n^4-25n^3+14}$ $\longrightarrow$ Questa converge PER confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^2}$

Def. hanno gli stessi termini, dunque stesso comp.

Infatti: $\frac{\frac{n^2+8-7n}{n^4-25n^3+14}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^4+8n^2-7n^3}{n^4-25n^3+14} \longrightarrow 1 \underset{\neq +\infty}{\neq 0}$

Quindi $\sum \frac{n^2+\dots}{n^4-\dots}$ si comporta come $\sum \frac{1}{n^2}$, quindi CONV.

Poiché $\sum |a_n|$ conv., anche $\sum a_n$ conv.

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^2+8-7n}{n^2-25n+14}} = \alpha_n$$

$\alpha_n \longrightarrow 1$ Non è verificata ipotesi (iii) di LEIBNITZ

$\Downarrow$

No COND. NEC.

$\Downarrow$

Di sicuro non conv.

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^2+8-7n}{n^3-25n+14}} = \alpha_n$$

Ora $\alpha_n \longrightarrow 0$ (L-iii)

$\alpha_n \geq 0$ defin. (L-i)

(L-ii) Terribile

Assol. conv.: studio $\sum |a_n| = \sum \frac{n^2+8-7n}{n^3-25n+14}$

Questa diverge a $+\infty$ per confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$

$\sum |a_n|$ div. $\Rightarrow$ BOH

$$\boxed{\frac{n^2+8-7n}{n^3-25n+14}}_{\alpha_n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{\cancel{n^3}+8n-7n^2-\cancel{n^3}+25n-14}{n(n^3-25n+14)} + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{-7n^2+33n-14}{n^4-25n^2+14n}$$

Torno da capo

$$\boxed{\sum (-1)^n \alpha_n} = \sum (-1)^n \left[\alpha_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right]$$

CONV. perchè somma di 2 serie che convergono.

$$= \sum (-1)^n \left[\frac{1}{n} + \frac{-7n^2+\dots}{n^4+\dots}\right]$$

grado den. = grado num. +2

$$= \boxed{\sum (-1)^n \frac{1}{n}} + \sum \boxed{(-1)^n \frac{-7n^2+\dots}{n^4+\dots}}$$

CONV. PER LEIBNITZ

CONV. PER ASSOLUTA CONVERGENZA

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 36}}$

$\boxed{\text{Es. 1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\sin\left(\frac{n+7}{n^2-3}\right)}}_{a_n}$$

Brutale: $\sin x \sim x$

$$\sin\left(\frac{n+7}{n^2-3}\right) \sim \frac{n+7}{n^2-3} \sim \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ DIVERGE

Rigoroso: TERMINI ≥ 0 def.

Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin(\ )}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin(\ )}{(\ )} \cdot \frac{(\ )}{\frac{1}{n}} = \underbrace{\boxed{\frac{\sin(\ )}{(\ )}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{n^2+7n}{n^2-3}}}_{\to 1}$$

$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}$

$\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, dunque diverge

Es. 2 $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \cdot \sin(n^3)$

$\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$: >0 perché $0<\frac{1}{n^3}\leq 1$

$\sin(n^3)$: segno variabile

Provo assol. conv., quindi studio $\displaystyle\sum \left|\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\cdot \sin(n^3)\right|$

$$= \sum \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\cdot |\sin(n^3)|$$

$$\sin\frac{1}{n^3}\cdot|\sin(n^3)| \leq \sin\frac{1}{n^3}$$

$\displaystyle\sum \sin\frac{1}{n^3}$ converge per confr. asint. con $\displaystyle\sum\frac{1}{n^3}$

$\Downarrow$ confronto tra serie a termini ≥ 0

$\displaystyle\sum \sin\frac{1}{n^3}\cdot|\sin(n^3)|$ conv.

$\Downarrow$ Assol. conv.

$$\sum \sin\frac{1}{n^3}\cdot\sin(n^3) \quad \text{conv.}$$

Esempio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^3}}_{a_n}$$

$a_n \geq 0$ sempre

$a_n \to (1-1)^3 = 0$

Cond. nec. ok

$\Downarrow$

può conv.

Brutale: $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\boxed{\frac{1}{n}\log n}} \sim 1 + \frac{\log n}{n}$, $x = \frac{1}{n}\log n \to 0$

$e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$

$$\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^3 \sim \left(\cancel{1} + \frac{\log n}{n} \cancel{-1}\right)^3 = \frac{\log^3 n}{n^3}$$

$$\sum \frac{\log^3 n}{n^3} \text{ converge} \implies \sum\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^3 \text{ converge}$$

Rigoroso: confr. asint. con $b_n = \frac{\log^3 n}{n}$ (FARE PER ESERC.)

$\boxed{\text{Es. 4}}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right)$$

$a_n \geq 0$ perché $\arctan x \leq \frac{\pi}{2}$ sempre

$a_n \to 0$ cond. nec. ok

Studioso ricorda che $n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right) \to 1$

Fatto a suo tempo come esempio di Hôpital

cioè

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, dunque diverge

Variante: $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right)^a$$

come prima faccio il confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^a}$ e

ottengo che converge $\Leftrightarrow$ $a > 1$.

— o —

<u>Esempio 5</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$a_n \to 0$

Brutale: $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$; $\arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}$

$$\sin x - \arctan x \sim \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6}$$

mettendo $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (e va bene perché $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$) abbiamo

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^3 = \frac{1}{6} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^a$$

costante e non cambia la conv.

$$\left(\quad \right)^\alpha \sim \left(\frac{1}{6} \frac{1}{n^{3/2}} \right)^a = \boxed{\frac{1}{6^a}} \frac{1}{n^{3a/2}}$$

converge $\iff \frac{3a}{2} > 1 \iff 3a > 2 \iff a > \frac{2}{3}$

Rigoroso: C.A. con $\frac{1}{n^{3a/2}}$

<u>Esempio (7-1)</u> $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^2+7}$

Non può convergere perché non è verificata la cond. nec.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 + 1 \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 \right] + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 = \frac{\cancel{n^2}+2-\cancel{n^2}-7}{n^2+7}$$

$$= -5 \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+7}} + \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n}$$

Conv. per assol. conv.

ci si riduce a studiare

$$\sum \frac{1}{n^2+7}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

le somme parziali sono

$1 = 1$

$1-1 = 0$

$1-1+1 = 1$

$1-1+1-1 = 0$

altern. 0 e 1 $\Rightarrow$

la serie è INDET.

$\Downarrow$ La serie data è indeterminata.