MAT 1 TLC

ORA 33

Titolo nota 26/10/2006

$\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n$ $\qquad s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ $\qquad s_n \to ?$

$$\boxed{s_{n+1} = s_n + a_{n+1}}$$

COND. NEC. $\qquad \sum a_n$ converge $\Rightarrow a_n \to 0$

Dim.

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$0 = l - l$$

se la serie converge vuol dire che $s_n \to l \in \mathbb{R}$

CRITERIO
- SERIE CON $a_n \geq 0$ def (segno costante)
- SERIE CON a_n a segno variabile

$\boxed{\text{CRITERIO CONFRONTO}}$ $0 \leq a_n \leq b_n$ definitiv.

$$\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$$

$$\sum b_n = \ell_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n = \ell_2 \in \mathbb{R} \qquad \ell_2 \leq \ell_1$$

Dim.

$$s_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n \; ; \quad s_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

Facciamo finta che $a_n \leq b_n$ sempre. Allora

$$s_n^a \leq s_n^b \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Se $\sum a_n = +\infty$, allora $s_n^a \longrightarrow +\infty$, ma allora $s_n^b \to +\infty$ pure, dunque anche $\sum b_n = +\infty$

Se $\sum b_n = l_1$, allora $s_n^b \to l_1 \in \mathbb{R}$, allora di sicuro s_n^a non può tendere a $+\infty$, dunque $\sum a_n$ non può divergere a $+\infty$. Essendo a termini ≥ 0, non le resta che convergere

---

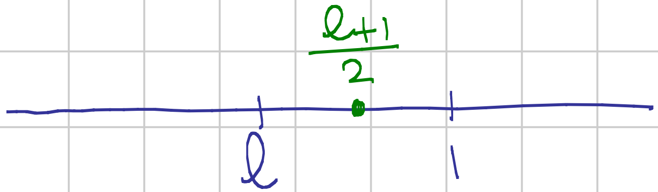
$\boxed{\text{RADICE}}$ $a_n \geq 0$, $\sqrt[n]{a_n} \to l \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$, allora

- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
- $0 \leq l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- $l = 1 \Rightarrow$ BOH

<u>Dim.</u> se $\sqrt[n]{a_n} \to l > 1$, allora per il criterio radice sui limiti, si ha che $a_n \to +\infty$, quindi non è verificata la cond. nec., quindi $\sum a_n$ non può conv., quindi div. a $+\infty$.

Se $\sqrt[n]{a_n} \to \ell < 1$, allora $a_n \to 0$, quindi condiz. nec. è verificata, quindi $\sum a_n$ POTREBBE convergere.

FALSA PARTENZA



Se $\sqrt[n]{a_n} \to \ell < 1$, allora definit. $\sqrt[n]{a_n} \le \frac{\ell+1}{2}$, quindi

$$a_n \le \overbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n}^{b_n}$$

$\sum b_n = \sum \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ è una serie GEOMETRICA, che converge in quanto $\frac{\ell+1}{2} < 1$.

Poiché $\sum b_n$ conv., anche $\sum a_n$ converge. $\square$

— o — o —

CRITERIO RAPPORTO: analogo per la parte $l > 1$; se $l < 1$ occorre ricalcolare la dim. fatta per le succ.

— o — o —

SERIE GEOM. $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ → div. a $+\infty$ se $a \geq 1$

→ conv. a $\frac{1}{1-a}$ se $-1 < a < 1$ $|a| < 1$

→ indet. se $a \leq -1$

ARMONICA GENER. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ → div. a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

→ conv. se $\alpha > 1$

AMICA ARM. GEN. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^\alpha}$ → div. a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

→ conv. se $\alpha > 1$

CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitiv. Supponiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

[Casi standard]

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè

$$\sum a_n \text{ conv.} \iff \sum b_n \text{ conv.}$$

$$\sum a_n = +\infty \iff \sum b_n = +\infty$$

Esempio 1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2+6n+5}{n^4-3n^2+28}} = a_n$

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2}$ conv perché armonica con $\alpha > 1$.

Rigoroso: $a_n \geq 0$ definit. Applico confr. asint. con

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+6n+5}{\underset{\uparrow\, a_n}{n^4-3n^2+28}} \cdot \underset{\uparrow\,\text{DIVISO } b_n}{n^2} \longrightarrow 1 \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \Rightarrow$$

le due serie hanno lo stesso comp.

Poiché $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ conv., anche $\sum a_n$ conv.

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{7}{\sqrt{n^2+5}}} \rightarrow a_n$

Brutale: $a_n \sim \frac{7}{\sqrt{n^2}} = \frac{7}{n}$ $\quad \sum \frac{1}{n} = +\infty$ (ARM. con $\alpha = 1$)

Rigoroso: $a_n \geq 0$ def. Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{7}{\sqrt{n^2+5}}}{\frac{1}{n}} = \frac{7n}{\sqrt{n^2+5}} = \frac{7\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}} \longrightarrow 7 \begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{array}$$

$\frac{5}{n^2} \to 0$

Poiché $l \neq 0$, $l \neq +\infty$, le 2 serie hanno lo stesso comp.

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty .$$

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

NOTA BENE: $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, quindi $\sin\frac{1}{n} > 0$

perché $\sin x > 0$ quando $0 < x \boxed{\leq 1}$ in realtà fino a π.

Brutale: $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, quindi $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \sum \frac{1}{n} = +\infty$

Rigoroso: confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 \underset{\neq +\infty}{\overset{\neq 0}{}} \quad \left[\text{solito } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right]$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, dunque diverge

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\left(\sqrt[n]{5}-1\right)}$ " $a_n > 0$

Brutale

$$\sqrt[n]{5}-1 = e^{\frac{1}{n}\log 5} - 1 \sim$$

$$\sim \cancel{1} + \frac{1}{n}\log 5 - \cancel{1}$$

Confronto asint. con $b_n = \dfrac{1}{n}$;

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[n]{5} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{5^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \boxed{\frac{e^{\frac{1}{n}\log 5} - 1}{\frac{1}{n}\log 5}} \log 5 \to \log 5$$

$\neq 0$

$\neq +\infty$

$\downarrow$

1

solito

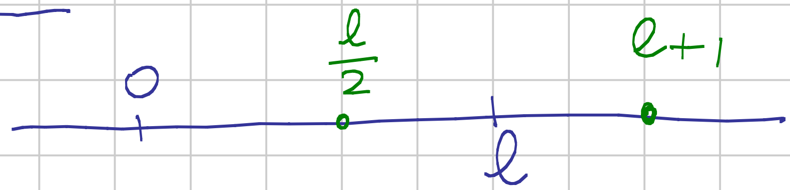
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, dunque diverge.

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 34}}$

Dim. criterio confronto asintotico



Se $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$, allora definitivamente

$$\frac{\ell}{2} \le \frac{a_n}{b_n} \le \ell+1$$

[Avendo supposto $b_n>0$, posso moltiplicare conservando i versi]

$$\frac{\ell}{2}\, b_n \le a_n \le (\ell+1)\, b_n$$

Supponiamo che $\sum b_n = +\infty$, allora per la disug. di sinistra avremo che $\sum a_n = +\infty$.

Se invece $\sum b_n$ conv., allora per la disug. di destra anche $\sum a_n$ conv. [In entrambi i casi abbiamo usato il CONFRONTO]

$\boxed{\text{CASI LIMITE}}$ Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \to 0$.

[Se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, allora defin. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, dunque $a_n \leq b_n$ def., dunque]

$$\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$$

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

— o — o —

Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$ [Se $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$, allora defin. $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, dunque $a_n \geq b_n$]

$\sum b_n$ conv. $\Rightarrow$ BOH

$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

—— o —— o ——

Esempio 1 $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\log n}{n}} \Rightarrow a_n \qquad a_n \geq 0$

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\log n}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\log n}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = \log n \to +\infty \quad \text{caso limite!}$$

[Se $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$, allora $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ def., quindi $a_n \geq b_n$ defin.]

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

Esempio 2 $\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \boxed{\frac{1}{n^2 \log n}}$ $=a_n$ $\quad a_n \geq 0$

Confr. asint. con $\quad b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2 \log n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\cancel{n^2} \log n} \cdot \cancel{n^2} = \frac{1}{\log n} \to 0 \qquad [\text{CASO LIMITE!}]$$

[$\frac{a_n}{b_n} \to 0$, quindi def. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, dunque $a_n \leq b_n$ def.]

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ conv. $(\alpha = 2 > 1)$, quindi

$\sum a_n$ converge.

Esempio 3 $\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \qquad a_n \geq 0$

Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^2}$. $\quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{\cancel{n^2}} \cdot \cancel{n^2} = \log n \to +\infty$

$\left[\frac{a_n}{b_n} \to +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq 1 \text{ def.} \Rightarrow a_n \geq b_n \text{ def.} \right]$

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow$ BOH.

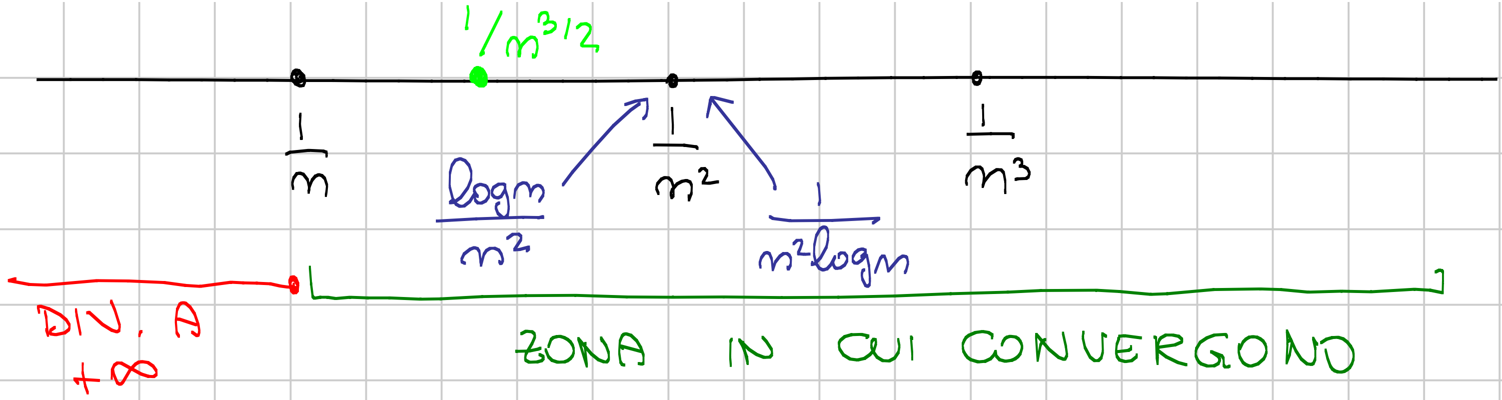
1° TENTATIVO : FALLITO !

Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$. $\quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n} = \frac{\log n}{n} \to 0$

$\left[\frac{a_n}{b_n} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ def.} \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ def.} \right]$

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow$ BOH

2° TENT. FALLITO



L'idea brutale è che $\sum \frac{\log n}{n^2}$ converga, ma un po' "meno bene" di $\sum \frac{1}{n^2}$

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n\sqrt{n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \to 0$$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \to 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \le 1 \text{ def.} \implies a_n \le b_n \text{ def.} \right]$$

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ conv. $\left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$

$$\implies \sum a_n \text{ conv.}$$

3° TENTATIVO : OK !

— o — o —

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n^2+5n}{n^a+2n+6}}}_{a_n}$ a = parametro $\boxed{a_n \ge 0}$

Per quali valori di a converge ?

Brutale : $a_n \sim \frac{n^2}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2}}$ converge $\iff a-2>1$

$$\Updownarrow$$

$$a > 3$$

Un po' più rigoroso: se $a \leq 2$, allora a_n non tende a zero
$\Rightarrow$ no condiz. nec. $\Rightarrow$ DIV. A $+\infty$

Se $a > 2$, allora faccio confr. asint. con $\frac{1}{n^{a-2}}$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \dots \to l \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$ BLA... BLA...

<u>Esempio 5</u> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n}{n^a+2n^4+1}$$

Idea: al den. c'è comunque n^4 che basta per farla convergere

Rigorosamente:

$$\boxed{\frac{n^2+5n}{n^a+2n^4+1}} \leq \boxed{\frac{n^2+5n}{2n^4}}$$

Questa conv. per C.A. con $\frac{1}{n^2}$

Questa conv. per confronto

Esempio 6 $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sinh \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$

Brutale: $\sinh x - \sin x = \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x} + \frac{x^3}{6}$

$$= \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$$

$$\sinh \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

Quindi la serie data si comporta come $\sum \frac{1}{n^3}$, dunque CONV.

Rigoroso: Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^3}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sinh \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$$

si riconduce a $\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3}$

Esempio 7 $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n+1}{n^2}$

$a_n \geq 0 \quad \sin n+1 \geq 0$

Taylor non si può usare perché l'argomento di sin tende a $+\infty$

$$\boxed{\frac{\sin n+1}{n^2}} \leq \boxed{\frac{32}{n^2}}$$

converge perché arm. con $\alpha = 2$

converge per confronto