MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA 30}}$

Titolo nota 25/10/2006

SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

a_n è una successione data
Voglio sommare tutti gli infiniti termini della successione

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

← SOMMATORIA, cioè una somma finita.

$$\parallel$$

$$s_n$$ [Somma parziale]

$\{s_n\}$ risulta una successione di numeri, di cui posso provare a fare il limite

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + a_1$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

s_n per $n \to +\infty$

- $s_n \to l \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ La serie converge ad l
- $s_n \to +\infty$, $s_n \to -\infty$ $\Rightarrow$ La serie diverge a $+\infty$ / $-\infty$
- s_n NON HA LIMITE $\Rightarrow$ La serie è INDETERMINATA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{INDET.}$$

Variante OVVIA

$$\sum_{n=37}^{\infty} a_n$$

$s_{37} = a_{37}$

$s_{38} = a_{37} + a_{38}$

$s_{39} = a_{37} + a_{38} + a_{39}$

$\vdots$

$$\boxed{s_{n+1} = s_n + a_{n+1}}$$

RELAZIONE RICORSIVA CHE DEFINISCE $\{s_n\}$

— o — o —

Es. 1. $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$

$s_0 = a_0 = 0$

$s_1 = a_0 + a_1 = 0 + 0 = 0$

allo stesso tutti gli $s_n = 0$

$s_n \to 0$

Es. 2 $\quad a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

$s_0 = a_0 = 1$

$s_1 = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + 1 + 1 = 3$

In generale

$s_n = n + 1 \longrightarrow +\infty$

si dimostra per induzione a partire dalla relaz. ricorrente.

Esempio 3 Fissiamo un parametro $a \in \mathbb{R}$. $a_n = a^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$$

$s_2 = 1 + a + a^2$

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Dimostrato per induzione (VALE se $a \neq 1$)

$$S_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ \dfrac{1}{1-a} & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{N.E.} & \text{se } a < -1 \\ \text{N.E.} & \text{se } a = -1 \end{cases}$$

[Num $\to -\infty$
Den. < 0]

[In questo caso
$a^{n+1} \to 0$]

[sui pari $\to +\infty$
sui dispari $\to -\infty$]

[Den $= 2$
Num $= 2, 0, 2, 0, 2, 0$]

RIASSUMENDO

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \text{Diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \text{Converge a } \dfrac{1}{1-a} & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{Indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}}$$

SERIE GEOMETRICA

— o — o —

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots = 1$$

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \left[= \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n(n+1)} \right]$$

Devo calcolare s_n e poi fare il $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

RIMANGONO SOLO IL 1° e L'ULTIMO

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

Ufficialmente: INDUZIONE

$\Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE A 1.

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \log(n+1) - \log n$$

$$s_n = \log\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= (\cancel{\log 2} - \underbrace{\log 1}_{=0}) + (\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 5} - \cancel{\log 4}) + \dots$$
$$+ (\log(n+1) - \cancel{\log n})$$

Conclusione

$\boxed{\text{INDUZIONE}}$

$$s_n = \log(n+1) \longrightarrow +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$$

PROPRIETÀ GENERALI

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell_1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \ell_2 \qquad c_n = (a_n + b_n) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

SOMMA PARZIALE n-esima rel. alla serie c

$$\boxed{S_n^c} = c_0 + c_1 + \dots + c_n$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

$$= \underset{\downarrow \atop \ell_1}{S_n^a} + \underset{\downarrow \atop \ell_2}{S_n^b}$$

Di conseguenza

$S_n^c \to \ell_1 + \ell_2$ TRANNE nei casi $+\infty - \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n$$

TRANNE NEI CASI $+\infty-\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=l_1\in\overline{\mathbb{R}}\qquad \lambda\neq 0\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)$$

$$(\lambda a_0)+(\lambda a_1)+(\lambda a_2)+\dots+(\lambda a_n)=\lambda\underbrace{\boxed{(a_1+a_2+\dots+a_n)}}_{l_1\in\overline{\mathbb{R}}}$$

λl_1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cdot b_n)$$

NULLA DI FURBO!! (È falso anche per somme FINITE)

$$a_0b_0+a_1b_1\neq(a_0+a_1)(b_0+b_1)$$

MAT I TLC

ORA 31

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(2^n) + \sin(n!)}{(n+3)\sqrt{n+1}}$$

Una formula esplicita per s_n NON SI TROVA

Ci sono CRITERI che permettono di stabilire se una SERIE CONVERGE O NO senza calcolare s_n.

Se converge, i criteri non dicono a cosa converge (non permettono di calcolare)

(Una volta che si sa che converge, ci sono metodi per calcolare in modo approssimato il valore di ℓ)

- SERIE
  - SERIE A TERMINI DEFINITIVAMENTE ≥ 0 (oppure ≤ 0)
  - SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE

- SERIE TERMINI ≥ 0
  - CRITERIO DELLA RADICE
  - " DEL RAPPORTO
  - " DEL CONFRONTO
  - " CONFRONTO ASINTOTICO
    - CASI STANDARD
    - CASI LIMITE

- SERIE TERMINI SEGNO VARIABILE
  - CRITERIO DI LEIBNITZ
  - CRITERIO ASSOLUTA CONVERGENZA

Se una serie è a termini ≥ 0, la successione delle somme parziali è DEBOLMENTE CRESCENTE

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$$

Di conseguenza la serie ha solo 2 possibili comportamenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \begin{cases} \nearrow \text{CONVERGE ad un certo } l \in \mathbb{R} \\ \searrow \text{DIVERGE a } +\infty \end{cases}$$

$\boxed{\text{CRITERIO DELLA RADICE}}$ Sia $a_n \geq 0$. Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \to l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Allora
* se $\ell > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$
* se $0 \le \ell < 1$, $\sum a_n$ converge
* se $\ell = 1$, allora BOH

$\boxed{\text{CRITERIO RAPPORTO}}$ Sia $a_n > 0$. Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Allora come sopra.

$\boxed{\text{CRITERIO CONFRONTO}}$ Siano $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Supp. che

$$a_n \le b_n \quad \text{definitivamente}$$

Allora

$$\sum a_n = +\infty \implies \sum b_n = +\infty$$

$$\sum b_n = \ell_1 \in \mathbb{R} \implies \sum a_n = \ell_2 \in \mathbb{R} \quad (\text{con } \ell_2 \leq \ell_1)$$

Negli altri casi non si può dire nulla.

— o — o —

$\boxed{\text{CONDIZIONE NECESSARIA}}$ Sia $\sum a_n$ una serie (nessuna ipotesi sui segni degli a_n).

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \longrightarrow 0$

NON VALE IL VICEVERSA. Se $a_n \to 0$, la serie può fare quello che gli pare (conv, div., essere indet.)

Operativamente: data una serie, controllo se verifica la cond. nec., cioè faccio il limite di a_n

se viene $\neq 0$, oppure che non esiste, di sicuro la serie NON CONVERGE

se viene $=0$, la serie POTREBBE convergere, ma non è obbligata a farlo.

Esempio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2+8}{(n+1)(n+5)}} \quad a_n$$

$a_n \geq 0$ sempre

La serie può
- ~~conv.~~ NO perché cond. nec. non verificata
- div. a $+\infty$

Controllo la cond. nec.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$$, quindi la serie NON CONV, quindi diverge a $+\infty$.

Esempio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2}{2^n}} = a_n$$

$a_n \geq 0$ sempre

la serie $\nearrow$ conv. / $\searrow$ div. a $+\infty$

Cond. necessaria: $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

quindi POTREBBE CONVERGERE

Applico RAPPORTO (verrebbe anche con RADICE: provare!)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{\cancel{n}+1}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2} < 1}$$

La serie converge.

— o — o —

Esempio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{n^2+25}} \to a_n$$

$a_n > 0$ sempre

RADICE: $\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow \, e} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+25}}}_{\downarrow \, 1} \longrightarrow e > 1$

$\sqrt[n]{\text{polin.}}$

Abbiamo dim. che $\sqrt[n]{a_n} \to e$, ma allora

$\Rightarrow$ La serie DIVERGE

$a_n \to +\infty$, quindi COND. NEC. non verificata, quindi NON converge

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{DIVERGE A } +\infty & \text{se } 0 \le \alpha \le 1 \\ \text{CONVERGE} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

SI PUÒ DARE PER BUONA [L'armonica classica è quella con $\alpha = 1$]

Esempio ...

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2 - 8}{n^4 + n^3 + 82}} \text{ " } a_n$$

$a_n > 0$ DEFINITIV.

$$\sum a_n \begin{cases} \nearrow \text{DIV. A } +\infty \\ \searrow \text{CONV.} \end{cases}$$

Cond. nec. $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ (può convergere)

$$a_n \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$ [Num + grande / Den + piccolo]

$$a_n \leq \boxed{\frac{1}{n^2}} = b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ Converge perché armonica gen. con $\alpha = 2$

$$\sum b_n \text{ conv.} \overset{\text{CONFRONTO}}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ conv.}$$

— o — o —

Esempio ...
$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\arctan(n!)}{n\sqrt{n+4}}}}_{a_n}$$

$a_n \geq 0$ sempre

$$\underbrace{\frac{\arctan(n!)}{n\sqrt{n+4}}}_{= a_n} \leq \underbrace{\frac{30}{n\sqrt{n}}}_{= b_n}$$

abbondare !!!

$$\sum b_n = 30 \sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = 30 \sum \frac{1}{n^{\boxed{3/2}}}$$

$\alpha > 1$ converge !

CONFRONTO

$$\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$$

MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA } 32}$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

seno iperbolico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

coseno iperbolico

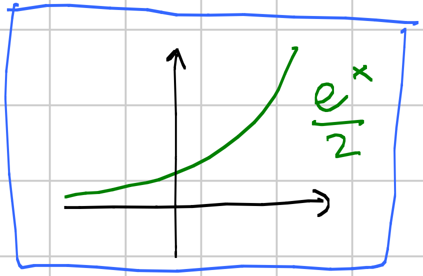
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

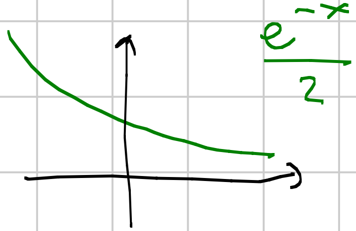
SIMMETRIE ?

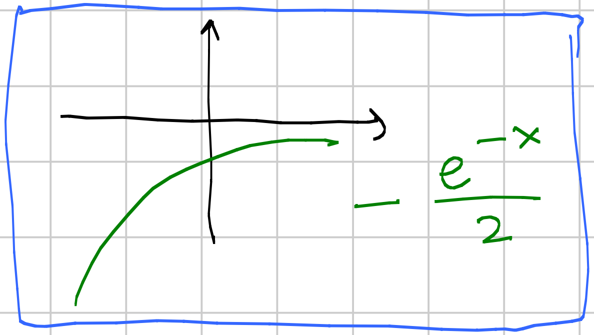
$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \qquad \text{PARI}$$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x \qquad \text{DISPARI}$$

$\sinh x$ è la somma di $\frac{e^x}{2}$ e $-\frac{e^{-x}}{2}$





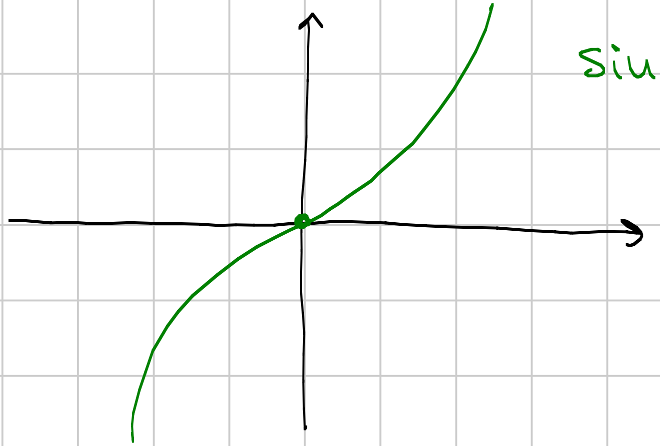


$\sinh x$, essendo somma di 2 funzioni strett. cresc., sarà a sua volta strett. cresc.

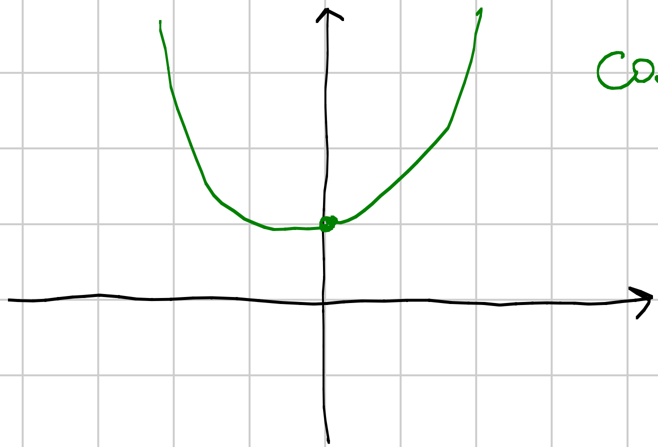
$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{+\infty}{e^x} - \overset{0}{e^{-x}}}{2} = +\infty$$

$$\sinh 0 = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \\ = +\infty$$

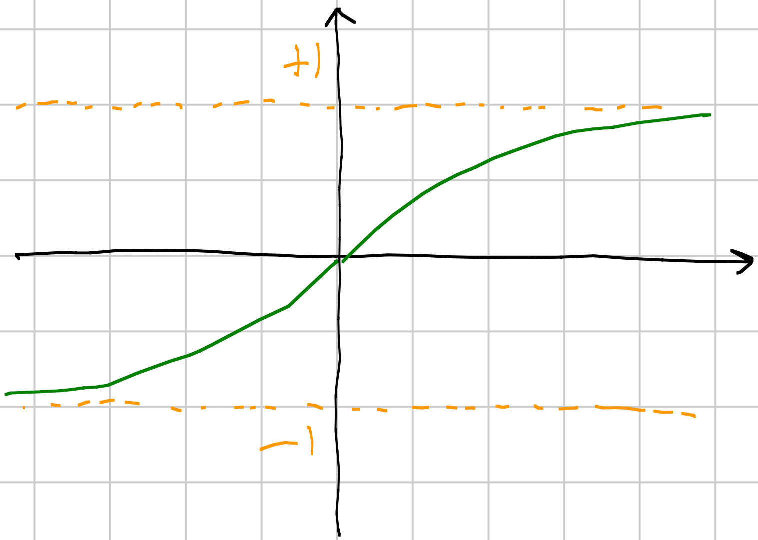


sinh x



cosh x

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$



tanh x

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

Per esercizio: trovare formule per $\cosh(2x)$

Sviluppi di Taylor.

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \cancel{\frac{x^5}{5!}} + \dots$$ e^{x}

$$+ 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} - \cancel{\frac{x^5}{5!}} + \dots\Big)$$ e^{-x}

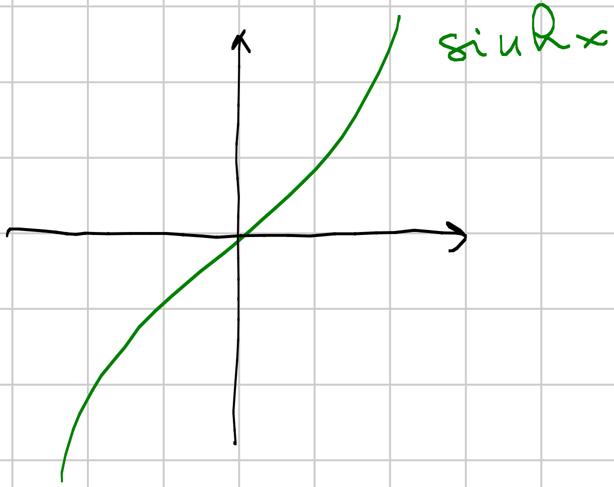
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

* termini con esp. pari nello sviluppo di e^x
* stesso sviluppo di $\sin x$, solo con tutti +

$\sinh x$ = se ne vanno i pari e restano solo i dispari

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

N.B. $\quad \sinh x + \cosh x = \dfrac{e^x - \cancel{e^{-x}}}{2} + \dfrac{e^x + \cancel{e^{-x}}}{2} = e^x$

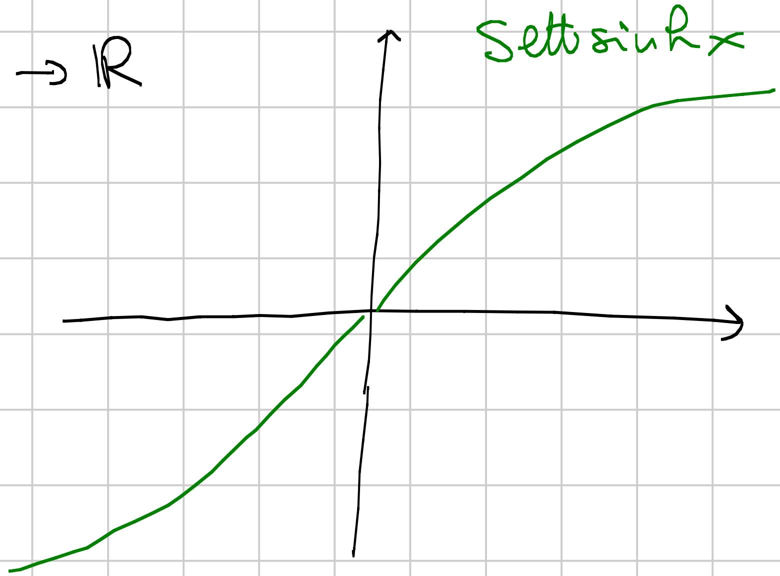


$f(x) = \sinh x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

è iniettiva e surgettiva, dunque invertibile.

La sua inversa è una

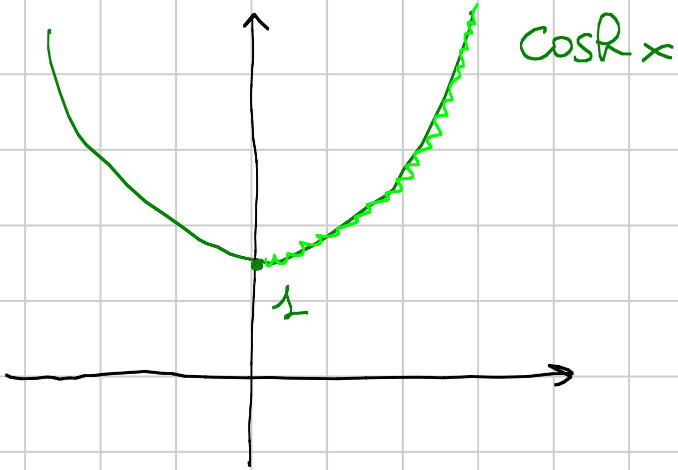
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



detta $g(x) = \text{Settsinh}\, x$

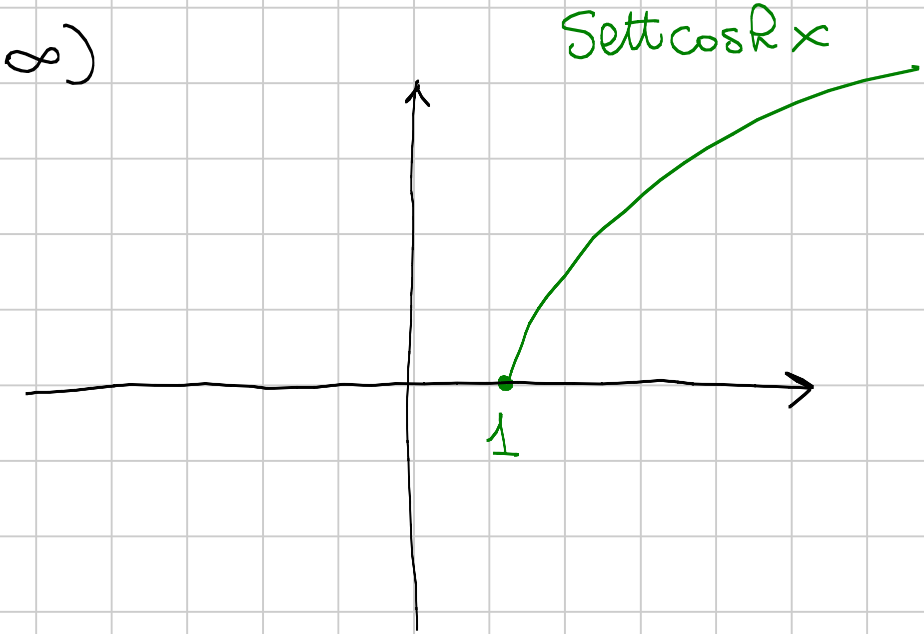
$f(x) = \cosh x$

$f : [0, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$

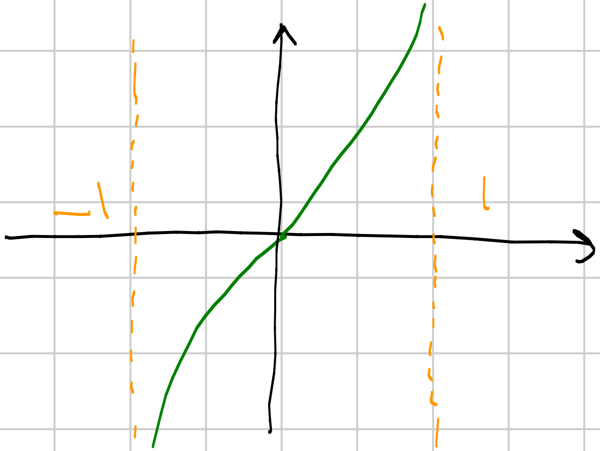


La sua inversa, Settcosh x, è una funzione

$g : [1, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$



Sett tanh $: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$



Ricaviamo una formula per Settsinh x (per es. Settcosh$x$)

$\sinh x = y$ Provo a ricavare x in funzione di y

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$; $e^x - e^{-x} = 2y$ Pongo $z = e^x$

$z - \frac{1}{z} = 2y$; $z^2 - 1 = 2yz$;

$z^2 - 2yz - 1 = 0$ Ricavo z (in funzione di y)

$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$ $\nearrow y + \sqrt{y^2+1}$, $\searrow y - \sqrt{y^2+1}$ 2 possibili valori per z

$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \rightsquigarrow x = \boxed{\log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \text{Settsinh}\, y}$

FORMULA

$$e^x = \boxed{y - \sqrt{y^2+1}} \rightsquigarrow \text{NULLA}$$

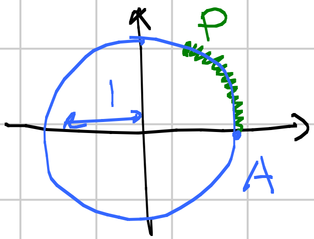
<0 perché

$y - \sqrt{y^2+1} < 0$

— o — o —

GEOMETRICAMENTE

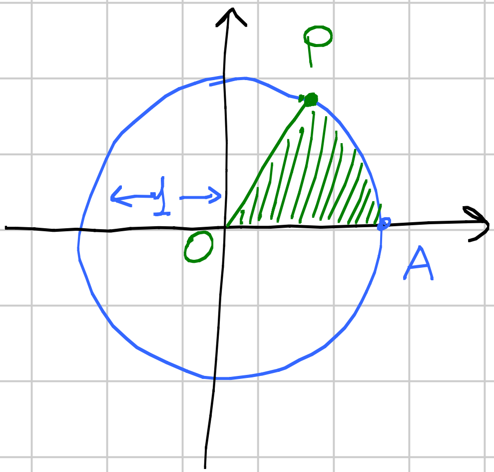
Trigo. classica



arco lungo x, individuo P

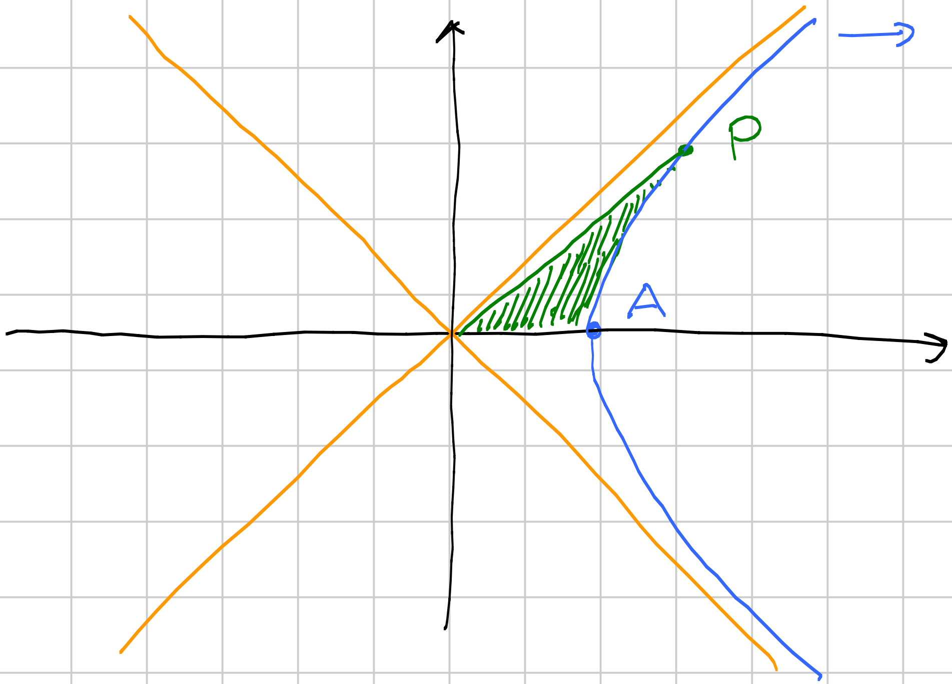
$P = (\cos x, \sin x)$

Trigo. alternativa



Percorro finché l'area del settore è $x/2$

$P = (\cos x, \sin x)$

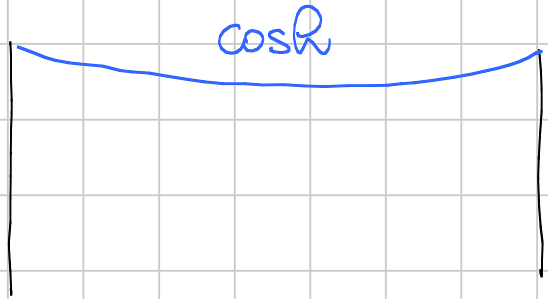


iperbole di equazione

$$\boxed{x^2-y^2=1}$$

Percorro finché l'area del settore è $\frac{x}{2}$

$$P=(\cosh x, \sinh x)$$



PALI