MAT 1 TLC

ORA 26

Titolo nota

21/10/2006

Formula di Taylor

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Sotto opportune ipotesi su f
[esistenza delle prime n derivate]
esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{o(x^n)}_{\text{ERRORE / RESTO DI PEANO}} \qquad \text{per } x \to 0$$

[Si può approssimare $f(x)$ con un polinomio $P_n(x)$ commettendo un errore che è $o(x^n)$, dunque "piccolo" quando $x \to 0$"]

Il polinomio $P_n(x)$ è dato dalla formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$\boxed{\text{Dim. nel caso } n=3}$

Devo dim. che $f(x) = \overbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3}^{P_3(x)} + o(x^3)$

il che equivale a dim. che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2 - \frac{f'''(0)}{6}x^3}{x^3} = 0$$

Il limite è $\frac{f(0) - f(0)}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Hôp

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x - \frac{f'''(0)}{2}x^2}{3x^2} \qquad \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hôp}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f''(0) - f'''(0)\,x}{6x} \qquad \frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\^op}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{6} = f'''(0) - f'''(0) = 0$$

— o — o —

SVILUPPI DI TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

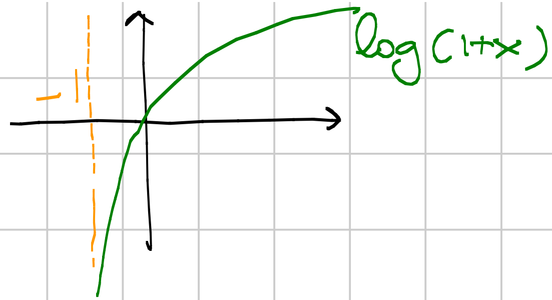
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$\sin h\, x =$

$\cos h\, x =$

come $\sin x$ e $\cos x$ solo con tutti + invece che con segni alterni

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$



$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4$$

Casi particolari

[Per esponenti di x > α, il coeff. diventa 0]

$\boxed{\alpha \text{ intero positivo}}$ $\Rightarrow$ solito sviluppo del "binomio di Newton"

$\boxed{\alpha = -1}$ $\quad (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$

$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$ $\quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \dots$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

Domanda: det. il pol. di Taylor di ordine 4 ($n=4$) per
$f(x) = \sin x$

$\boxed{x \to 0}$

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{6} \qquad P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ VERA (Taylor con $n=3$)

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ VERA (Taylor con $n=4$)
E MIGLIORE DELLA PRECEDENTE

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$ FALSA (dovrei aggiungere $+\frac{x^5}{120 = 5!}$)

$\sin x = x \underbrace{\boxed{-\frac{x^3}{6}}}_{= o(x^2)} + o(x^2)$ VERA MA "INUTILE" (~~BUFFA~~)

Se si mette $o(x^2)$, questo
mangia tutte le potenze con esp. > 2
Quindi è INUTILE SCRIVERLE

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \boxed{-\sin x} + x^5}{x^3} = \text{uso Taylor}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{6} + \boxed{\frac{o(x^3)}{x^3}} \right) = \frac{1}{6}$$

$\boxed{\frac{o(x^3)}{x^3}} \to 0$ per def. di $o(x^3)$

$$\frac{x \boxed{-\sin x} + x^5}{x^3} = \frac{\overbrace{\cancel{x} - \cancel{x}}^{0} + \overbrace{\frac{x^3}{6}}^{} - \overbrace{\frac{x^5}{120} + o(x^5) + x^5}^{0}}{x^3}$$

$$= \frac{1}{6} \boxed{- \frac{x^2}{120}} + \boxed{\frac{o(x^5)}{x^3}} + \boxed{x^2} \to \frac{1}{6}$$

$\boxed{- \frac{x^2}{120}} \to 0$, $\boxed{\frac{o(x^5)}{x^3}} \to 0$, $\boxed{x^2} \to 0$

$\frac{o(x^5)}{x^5} \to 0$, $x^3 \to 0$

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + o(x^2)}{x^3} = \frac{o(x^2)}{x^3} = \text{BOH}$$

mi fermo con $n=2$

$$\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0 \qquad \frac{1}{x} \to \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(\sin x) + x^5}{x^3}$$

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 27}}$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{3!}x^n + o(x^n)$$

$\boxed{1}$ $f(x) = e^x \qquad f^{(k)}(x) = e^x \qquad f^{(k)}(0) = 1$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} = \text{coeff. di } x^k$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \sin x$, $f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$, ... si ripete con periodo 4

$f(0) = 0$, $f^{(1)}(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$

Quindi otteniamo la successione $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1,$
quindi 0 sui pari e alternativamente 1 e -1 sui dispari

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \text{coeff. di } x^k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \text{alt. } \pm \frac{1}{k!} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $\cos x$ stessa cosa sfasata di 1-ordine di derivazione!

$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0$

$\boxed{4}$ $f(x) = \log(1+x)$ $\quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}$; $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$f^{(3)}(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}$; $f^{(4)}(x) = -6\frac{1}{(1+x)^4}$

$$f^{(5)}(x) = 24\frac{1}{(1+x)^5}$$

In generale $\boxed{f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{1}{(1+x)^k} (k-1)!}$

DIMOSTRARE RIGOROSAMENTE PER INDUZIONE

$$\text{coeff. di } x^k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)!$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{\cancel{(k-1)!}}{k\,\cancel{(k-1)!}} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots$$

$$\boxed{\arctan x} = \boxed{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots}$$

DERIVA DERIVO

Esempio 1 $\quad f(x) = \sin x + e^x \quad$ voglio calcolare $P_3(x)$

$$\boxed{x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^3)} + \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^3}{6}} + o(x^3)}$$

$$= \underbrace{\boxed{1 + 2x + \frac{x^2}{2}}}_{P_3(x)} + o(x^3)$$

"Lo sviluppo della somma è la somma degli sviluppi"

Quanto vale $f'''(0)$?

$$0 = \text{coeff. di } x^3 = \frac{f'''(0)}{3!} \implies \boxed{f'''(0) = 0}$$

Idem per la $f^{(7)}$, $f^{(11)}$, $f^{(15)}$, ...

Esempio 2

$$f(x) = e^x \cdot \cos x \qquad P_3(x)$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$= 1 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + x - \frac{x^3}{2} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} \qquad o(x^3)$$

$$= \underbrace{\boxed{1 + x - \frac{x^3}{3}}}_{P_3(x)} + o(x^3)$$

Lo sviluppo del prodotto è il prodotto degli sviluppi (molti termini vengono inglobati nell' o-piccolo).

Composizioni tranquille

PIACEREBBE

$$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o\left((3x)^3\right) \overset{\downarrow}{=} 3x - \frac{27}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

PIAC.

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{(x^3)^3}{6} + o\left((x^3)^3\right) \overset{\downarrow}{=} x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^3\omega(t) \qquad \lim_{t\to 0} \omega(t) = 0$$

$$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + \underbrace{(3x)^3\omega(3x)}_{27x^3\omega(3x)}$$

$$= x^3 \underbrace{27\omega(3x)}_{\omega_2(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \overset{\omega_2(x)}{\overset{\shortparallel}{27\omega(3x)}} = 0$$

$t = 3x \ldots$

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9)$$ VERA

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^3)$$ VERA MA BUFFA

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{10})$$ VERA

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{12})$$ VERA

$$\boxed{\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)}$$

USANDO QUESTA

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{14})$$ VERA

Il termine succ. verrebbe fuori da $\frac{t^5}{120}$ e quindi sarebbe $\frac{(x^3)^5}{120}$ quindi espon. 15