MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 24}}$

Titolo nota — 19/10/2006

Derivabilità $\Rightarrow$ continuità
$\not\Leftarrow$

Derivata della funzione inversa (con esempi)

— o —

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un p.to x_0.
Allora f è continua in x_0.

Hp esiste $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ed è $\in \mathbb{R}$

Tesi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, oppure equivalentemente

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$$

Pongo $x - x_0 = h$. Quando $x \to x_0$, ho che $h \to 0$ $\quad (x = x_0 + h)$

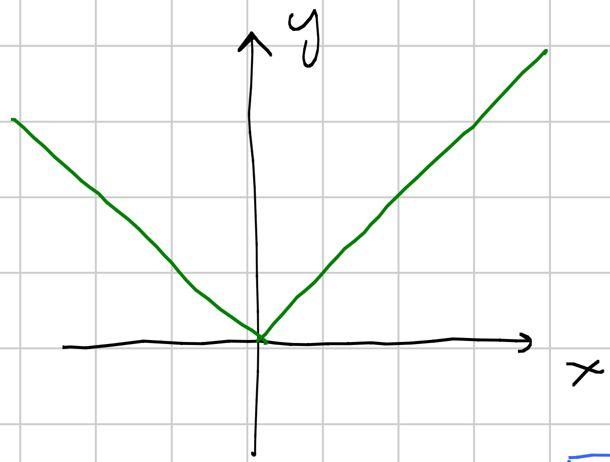
$$\lim_{h \to 0} \left(f(x_0 + h) - f(x_0) \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}}_{\downarrow} \cdot \underbrace{\boxed{h}}_{\downarrow} = 0$$

$$f'(x_0) \quad \cdot \quad 0$$

f continua in $x_0 \overset{?}{\Longrightarrow} f$ è derivabile in x_0

NO



<u>Esempio</u> $f(x) = |x|$

$x_0 = 0$, Per calcolare $f'(0)$,
devo calcolare

NON ESISTE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$

Quando $h \to 0^-$, si ha che $h<0$.
dunque $|h| = -h$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1$$

Conclusione $f(x) = |x|$ è continua in $x_0 = 0$, ma non derivabile in $x_0 = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \text{N.E.} & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}$$

<u>Esempio</u> $f(x) = |\sin x^3|$ $x_0 = 0$

Esiste $f'(0)$??

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|\sin h^3| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|\sin h^3|}{h}$$

$$\frac{|\sin h^3|}{h} \to 0$$

Fatto generale:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |g(x)| = 0$$

TABELLINA

Usando il fatto generale per dimostrare che

$\frac{|\sin h^3|}{h} \to 0$ mi basta dimostrare che $\left|\frac{|\sin h^3|}{h}\right| \to 0$

$$\left|\frac{|\sin h^3|}{h}\right| = \left|\frac{\sin h^3}{h}\right| = \left|\underbrace{\boxed{\frac{\sin h^3}{h^3}}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\boxed{h^2}}_{\downarrow\, 0}\right| \to |0| = 0$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} \sin\frac{1}{x^2} = 0$$

$\frac{0}{0}$. N.E.

Uso il criterio di prima. Dico che il lim è 0. Per dim. mi basta far vedere che $\lim |\cdot| = 0$

$$\left| \frac{\cos x - 1}{x} \sin \frac{1}{x^2} \right|$$

$$\underset{\downarrow\ 0}{0} \leq \underbrace{\left| \frac{\cos x - 1}{x} \right| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2} \right|}_{\to\ 0} \leq \underbrace{\left| \frac{\cos x - 1}{x} \right|}_{\downarrow\ 0} = \underbrace{\left| \boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}} \cdot \boxed{x} \right|}_{\downarrow\ 0}$$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} \to -\frac{1}{2}, \quad x \to 0$$

Derivata funzione inversa

Sia f una funzione e sia g la sua inversa. Allora

$g(f(x)) = x$ $\quad$ $\forall x \in$ insieme di partenza di f

$f(g(x)) = x$ $\quad$ $\forall x \in$ insieme di partenza di g = insieme di arrivo di f

Prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo di poter derivare f e g

$f(g(x)) = x$ Derivando... $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$

Quindi

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$$

FORMULA RICAVATA SUPPONENDO CHE f e g siano DERIVABILI e $f'(g(x)) \neq 0$

Applicazioni:

$\boxed{1}$ $f(x) = \tan x$ $\qquad g(x) = \arctan x$

$f'(x) = 1 + \tan^2 x$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(g(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$$

Uso FORMULA DATA

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

Nessun problema di annullamento del den.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ $\qquad g(x) = \log x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

NESSUN PROBLEMA PER $x > 0$ dove log è definito

— o — o —

$\boxed{3}$ $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $g(x) = \arcsin x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

vale solo se $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

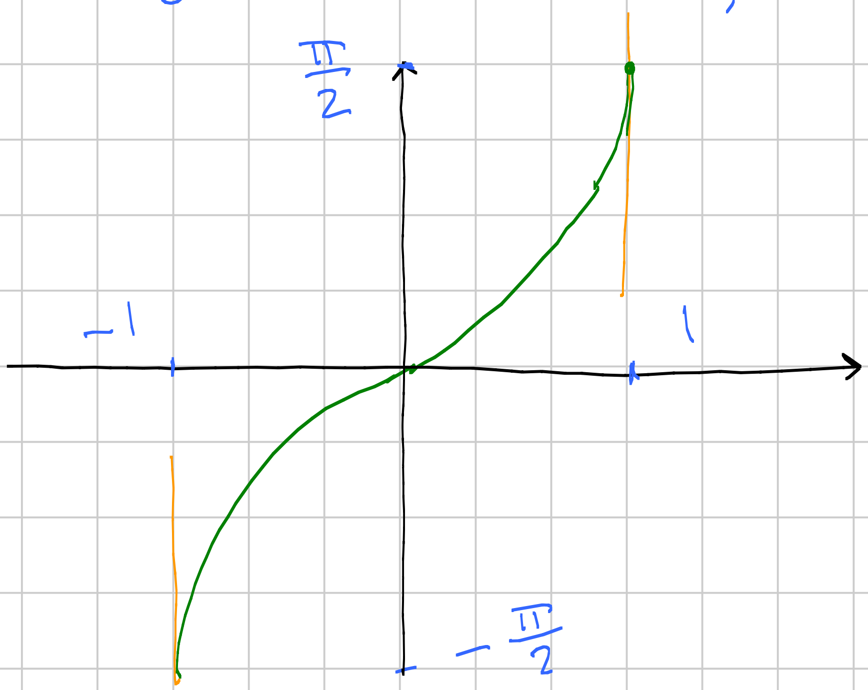
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(g(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Problemi per $x < -1$ e $x > 1$, ma già sappiamo che $x \in [-1, 1]$

Ho usato la formula con $\alpha = g(x) = \arcsin x$ e questo, per definizione, sputa valori in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

I problemi ci sono per $x = \pm 1$. In quei punti $\arcsin x$ è definito e continuo, ma non derivabile.



Geometricamente: la tg. al grafico in $x=1$ e $x=-1$ è verticale.

$$\lim_{x \to 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

Es. Fare stessa cosa con $\cos x$ $\arccos x$

$\boxed{\text{MAT 1 TLC}}$ $\boxed{\text{ORA25}}$

Derivate successive

$f'' = (f')'$ derivata SECONDA

$f''' = (f'')'$ ...

f'' $\qquad \dfrac{d^2 f}{dx^2}$ $\qquad \ddot{f}$

f''' $\qquad \dfrac{d^3 f}{dx^3}$

FINE CORSA

f^{IV} $\qquad \dfrac{d^4 f}{dx^4}$

Derivata 127-esima

$\dfrac{d^{127} f}{dx^{127}}$ $\qquad f^{(127)}$ $\qquad f^{(k)}$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Supponiamo di voler calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ $(x_0 \in \overline{\mathbb{R}})$

Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia...

- $g(x) \neq 0$ vicino a x_0 (tranne al + in x_0)
- $f'(x)$ e $g'(x)$ devono esistere
- $g'(x) \neq 0$ bla bla...

(ii) il limite sia del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

(iii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ESCLUSO QUINDI IL TIPO 4)

Allora $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Esempio 1 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x}$

NO: non è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Applico De L'Hôpital $= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{1} = 0$

Infatti $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$

Esempio 2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x + \sin x}{x}$

NO: il limite è $\frac{\infty}{\infty}$, ma $\lim \frac{f'}{g'}$ N.E. Allora BOH. Non si può applicare

Applico De L'Hôpital $= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + \cos x}{1} =$ N.E

dunque non esiste il limite iniziale

Infatti $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2+\underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\downarrow\ 0}\right)=2$

Esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\overset{\text{Hôp}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

Ho usato che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$, ma per dimostrare questo si era usato quello stesso limite.

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ : uso H\^op.}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + 5x^4}{3x^2} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ : uso H\^op.}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + 20x^3}{6x} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ : uso H\^op.}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 60x^2}{6} = \frac{1}{6}$$

Risalendo, il limite originario è $\frac{1}{6}$

Altro modo:

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \boxed{\frac{x\left(1 - \frac{\sin x}{x} + x^4\right)}{x^3}}$$

$$= \frac{\cancel{x}\left(\cancel{1} - \cancel{1} + x^4\right)}{x^{\cancel{3}\,2}} = \frac{x^4}{x^2} = x^2 \to 0$$

NO!!!!

LIMITE METÀ PER VOLTA

Utilità pratica di De L'Hôpital per il calcolo dei limiti:

3%

Esempi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x} = 0 \qquad \left[\frac{0}{+\infty}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \infty \cdot 0$$

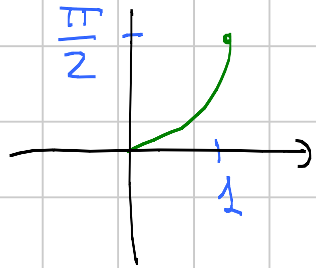
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \qquad \left[\frac{0}{0} : \text{Hôpital}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) \overset{\text{Hôp}}{=} 1$$

Applico criterio funzioni $\to$ succ.
(pongo $x=n$,
quando $n\to+\infty$,
anche $x\to+\infty$)

<u>Esempio</u> $$\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin x}{x-1}$$



$\frac{0}{0}$: Hôp $$= \lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \lim_{x\to1^-} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{\boxed{1-x}}} = \sqrt{2} \qquad \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hôp} \right]$$

N.B. Quando $x \to 1^-$, questo è >0

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cancel{-} \frac{1}{2\sqrt{1-x}}} =$$

$$\left(\sqrt{1-x}\right)' = \left(\left(1-x\right)^{1/2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-x\right)^{-1/2} \cdot (-1)$$

Der. di $1-x$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 1^-} 2\sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}} = \lim_{x \to 1^-} 2\sqrt{\frac{\cancel{1-x}}{(1+x)\cancel{(1-x)}}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{n!} - (n!)^n$$

$$n^{n!} - (n!)^n = \underbrace{\boxed{n^{n!}}}_{+\infty}\left(1 - \underbrace{\boxed{\frac{(n!)^n}{n^{n!}}}}_{0}\right) \longrightarrow +\infty$$

DA DIMOSTRARE

DISUG. UTILE

$$n! \leq n^n$$

$n\cdot(n-1)\cdot\ldots$ $\qquad$ $n\cdot n\cdot\ldots\cdot n$

$$\underset{\downarrow\, 0}{0} \leq \underset{\downarrow\, 0}{\frac{(n!)^n}{n^{n!}}} \leq \underset{\downarrow\, 0}{\frac{(n^n)^n}{n^{n!}}} = \frac{n^{n^2}}{n^{n!}} = \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n^{n!-n^2}}}$$