MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 21}}$

Titolo nota 18/10/2006

Derivata e differenziale in una variabile

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

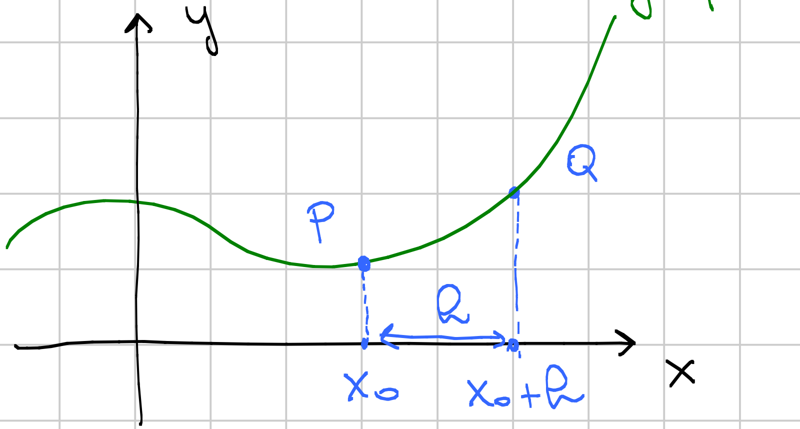
Fissiamo $h \neq 0$ (incremento)

<u>Def</u>. Si dice rapporto incrementale il quoziente

corrisp. incremento y →

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

incremento della x →



P: $(x_0, f(x_0))$, Q: $(x_0+h, f(x_0+h))$

Geometricamente il rapporto incrementale è il coeff. angol. della retta passante per P e Q.

<u>Def.</u> f si dice DERIVABILE in x_0 se esiste il limite del rapp. increm. per $h \to 0$, cioè se esiste ed è $\in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Il valore del limite si dice DERIVATA di f in x_0 e si indica in uno dei seguenti modi

$$f'(x_0) \qquad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad \dot{f}(x_0)$$

Geometricamente, quando $h \to 0$, il punto Q tende al punto P e la retta PQ tende a diventare la retta tangente al grafico nel punto P.

Rapporto increm $\longrightarrow$ $f'(x_0)$

$\|$ $\|$

Coeff. ang. retta PQ Coeff. ang. retta tg.

retta PQ $\longrightarrow$ retta tangente in P

— o — o —

<u>Def</u>. f si dice DIFFERENZIABILE in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \to 0}$$

<u>Teorema</u> f è differenziabile in $x_0 \Longleftrightarrow f$ è derivabile in x_0.
Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

Dim che se f è differenziabile, allora f è derivabile

Hp f diff., cioè $f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$ per $h \to 0$

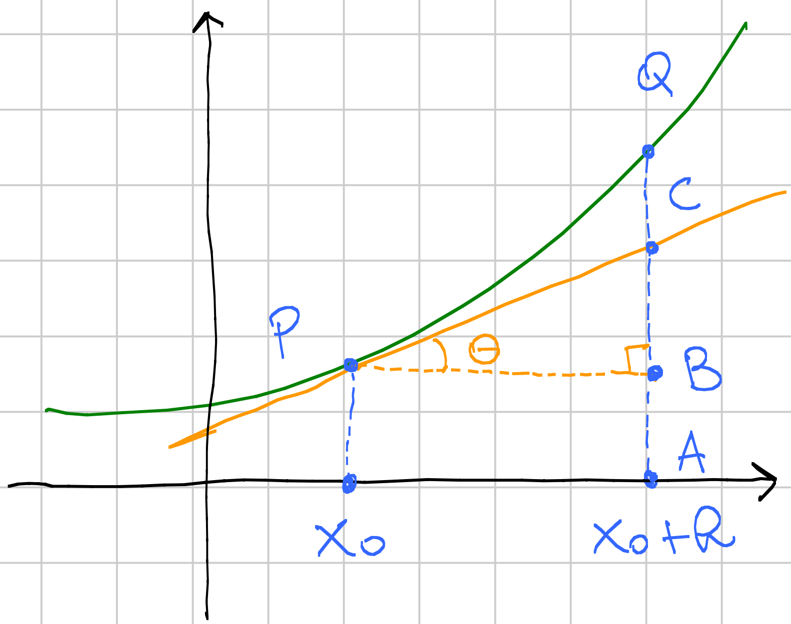
Tesi f deriv, cioè esiste lim. del rapp. increm.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\alpha + \underbrace{\boxed{\frac{o(h)}{h}}}_{\downarrow\, 0} \right) = \alpha = f'(x_0)$$

L'altra implicazione si dimostra allo stesso modo.

— o — o —



Per trigonometria elementare

$$\frac{CB}{PB} = \tan\theta = \text{coeff. ang. retta tg}$$
$$= f'(x_0)$$

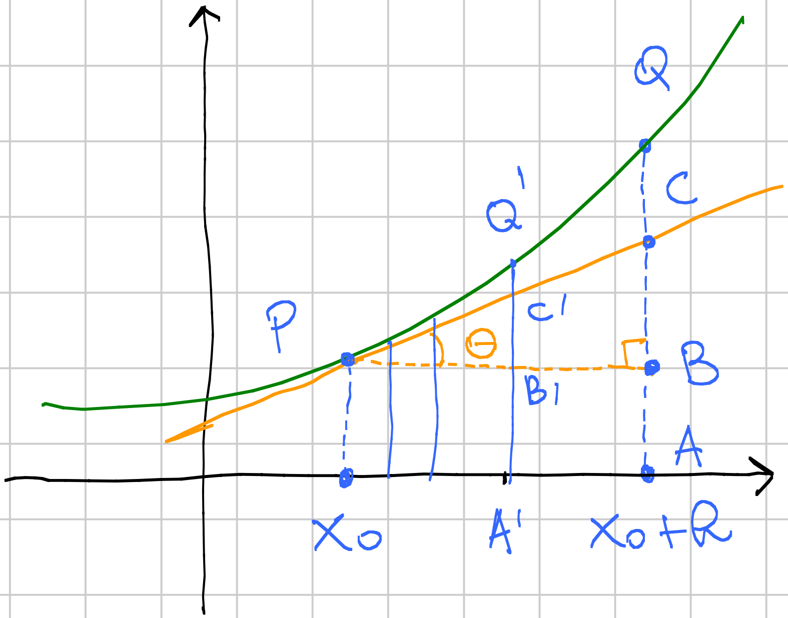
$$CB = f'(x_0)\cdot PB = f'(x_0)\cdot h$$

$$AQ = AB + BC + CQ$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\cdot f'(x_0) + \boxed{o(h)}$$

???

Facciamo $h \to 0$, Il pezzo AB non cambia. Il pezzo BC tende a zero in maniera proporzionale ad h (linearmente in h).



Il pezzo CQ tende a zero più velocemente di h, e dunque il terzo pezzo è $o(h)$.

Equazione retta tangente.

È una retta che passa per $P(x_0, f(x_0))$ e ha coeff. ang. $f'(x_0)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Se $x - x_0$ lo chiamiamo h: $\quad y = f(x_0) + f'(x_0)\,h$

primi 2 pezzi dello sviluppo precedente

Interpretazione geometrica: la retta tangente è quella retta che approssima il grafico per x vicini ad x_0 con un errore che è $o(x - x_0)$.

Teorema Se f e g sono deriv. in x_0, allora $(f+g)$ e' deriv. in x_0 e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dim. Per ipotesi sappiamo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h) \iff f \text{ deriv.}$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)\,h + o(h) \iff g \text{ deriv.}$$

Sommiamo

$$\boxed{f(x_0+h) + g(x_0+h)} = \boxed{f(x_0) + g(x_0)} + \left(f'(x_0) + g'(x_0)\right)h + o(h)$$

Se chiamo $s(x) = f(x) + g(x)$

$$s(x_0+h) = s(x_0) + \overbrace{\left(f'(x_0) + g'(x_0)\right)}^{s'(x_0)\,=}h + o(h)$$

Del tutto analogo il caso della differenza e anche del prodotto di una funzione per una costante.

$f(x)$, $g(x)$. Chiamiamo $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$
\begin{aligned}
p(x_0+h) &= f(x_0+h) \cdot g(x_0+h) \\
&= \big(f(x_0) + h f'(x_0) + o(h)\big) \cdot \big(g(x_0) + h g'(x_0) + o(h)\big) \\
&= f(x_0) \cdot g(x_0) + \\
&\quad + h\, f(x_0)\, g'(x_0) + h\, f'(x_0) \cdot g(x_0) \\
&\quad + \overbrace{\boxed{f(x_0) \cdot o(h)}}^{o(h)} + \overbrace{\boxed{h^2 f'(x_0)\, g'(x_0)}}^{o(h)} + \overbrace{\boxed{h\, f'(x_0) \cdot o(h)}}^{o(h)} \\
&\quad + \ldots,
\end{aligned}
$$

$$= p(x_0) + h \underbrace{\left[f(x_0) g'(x_0) + f'(x_0) g(x_0) \right]}_{p'(x_0)} + o(h)$$

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA } 22}$

$$h^2 f'(x_0)\, g'(x_0) \overset{?}{=} o(h)$$

In generale $\quad k h^2 = h \cdot \underbrace{k h}_{\omega(x)} \qquad \lim_{h \to 0} \omega(h) = 0$

$$= o(h)$$

$$h \cdot o(h) = o(h) \quad \text{per } h \to 0$$

$$h \cdot h\,\omega(h) = h \underbrace{\left(h\,\omega(h)\right)}_{\omega_1(h) \to 0} = h\,\omega_1(h)$$

Derivate delle funzioni elementari

(1) $f(x) = x^2 \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

In alternativa:

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot h + h^2$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\boxed{2x_0}}_{f'(x_0)} \cdot h + o(h)$$

(1.5) $f(x) = x^k$ $\qquad f'(x_0) = k\,x_0^{k-1}$ (si dim. per induzione usando la deriv. del prodotto).

(2) $f(x) = e^x$

$\boxed{e^{a+b} = e^a \cdot e^b}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}\cdot e^{h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x_0} \boxed{\left(\frac{e^{h}-1}{h}\right)} = e^{x_0}$$

$\downarrow$ limite notevole

1

$$f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0}\cdot e^{h} =$$ [sviluppini]

$$= e^{x_0}\left(1 + h + o(h)\right)$$

$$= e^{x_0} + e^{x_0} \cdot h + e^{x_0} \cdot o(h)$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\boxed{e^{x_0}}}_{f'(x_0)} \cdot h + o(h)$$

③ $f(x) = \sin x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}$$

<u>1° modo</u>: usare formule per $\sin\alpha - \sin\beta$ con $\alpha = x_0 + h$ e $\beta = x_0$

<u>2° modo</u>: usare formule per $\sin(x_0 + h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\boxed{\cos x_0} \cdot \boxed{\frac{\sin h}{h}} + \boxed{\sin x_0} \, \boxed{\frac{\cos h - 1}{h}} \right) = \cos x_0$$

$$\cos x_0 \cdot 1 + \sin x_0 \cdot 0$$

$$\boxed{\frac{\cos h - 1}{h^2}} \cdot h \quad \to \quad -\frac{1}{2} \cdot 0$$

$$f(x_0+h) = \sin(x_0+h) = \sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h$$

$$= \sin x_0 \left(1 + o(h)\right) + \cos x_0 \left(h + o(h)\right)$$

$$= \sin x_0 + \boxed{\sin x_0 \cdot o(h)} + \cos x_0 \cdot h + \boxed{\cos x_0 \cdot o(h)}$$

$$f'(x_0)$$

$$= f(x_0) + h \cdot \boxed{\cos x_0} + o(h)$$

$\boxed{3.5}$ Da fare: derivata di $\cos x = f(x) \rightsquigarrow f'(x_0) = -\sin x_0$

$\boxed{4}$ $f(x) = \log x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(x_0+h) - \log(x_0)}{h} = \qquad \left[\log a - \log b = \log \frac{a}{b}\right]$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0} \cdot x_0} = \frac{1}{x_0}$$

se pongo $y = \frac{h}{x_0}$ diventa

$$\lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f^2} \cdot f' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'$$ poi teorema sul prodotto

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempi di calcolo di derivate

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

① $f(x) = \tan x$ $\qquad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

② $f(x) = \sin(x^2)$ $\qquad f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$

③ $f(x) = \cos(e^x)$ $\qquad f'(x) = -\sin(e^x) \cdot e^x$

④ $f(x) = e^{\cos x}$ $\qquad f'(x) = e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$

(5) $f(x) = e^x \cdot \cos x$ $\qquad f'(x) = e^x \cdot \cos x + e^x(-\sin x)$

$$= e^x(\cos x - \sin x)$$

(6) $f(x) = \sin^3(x^2) = 3\sin^2(x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$

+ esterna, cioè il cubo

intermedia cioè il sin

più interna, cioè x^2

(7) $f(x) = (\sin x)^x$ ....

(8) $f(x) = \boxed{5^x} = e^{\log(5^x)} = \boxed{e^{x \log 5}}$ STESSA COSA

$$f'(x) = e^{x \log 5} \cdot \log 5 = 5^x \cdot \log 5$$

(7) $f(x) = (\sin x)^x = e^{x \log(\sin x)}$

$$f'(x) = e^{x \log(\sin x)} \left[x \log(\sin x) \right]'$$

$$= (\sin x)^x \cdot \left[x \log(\sin x) \right]'$$

$$= (\sin x)^x \cdot \left[\log(\sin x) + x \left(\log(\sin x) \right)' \right]$$

$$= (\sin x)^x \cdot \left[\log(\sin x) + x \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right]$$

$$\left[(\sin x)^x \right]' = x (\sin x)^{x-1} \cdot \cos x$$ NOOO!!!!!

(9) $f(x) = (\sin x)^k$ $\quad f'(x) \underset{\text{SI}}{=} k(\sin x)^{k-1} \cdot \cos x$

Esponente FISSO ok, con esponente variabile NO.

— o — o —

$c(x) = f(g(x))$

<u>Hp</u> $g(x_0+h) = g(x_0) + h\,g'(x_0) + o(h)$

Posto $y_0 = g(x_0)$, $f(y_0+k) = f(y_0) + k\,f'(y_0) + o(k)$

$$c(x_0+h) = f(g(x_0+h))$$
$$= f(g(x_0) + \underbrace{h\,g'(x_0) + o(h)})$$
$$= f(y_0 + k)$$

$$= f(y_0) + \overbrace{\left[h\, g'(x_0) + o(h)\right]}^{k} f'(y_0) + o\Big(\overset{k}{[\quad]}\Big)$$

$$= f(g(x_0)) + h\, \boxed{g'(x_0)\, f'(g(x_0))} + o(h) + o(h)$$

Resterebbe da fare che

$$o\big(h\, g'(x_0) + o(h)\big) \Rightarrow o(h)$$

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 23}}$

$$o\left(h g'(x_0) + o(h)\right) \Rightarrow o(h)$$

$$\left(h g'(x_0) + o(h)\right) \omega_1(h) =$$

$$= \left(h g'(x_0) + h\,\omega_2(h)\right) \omega_1(h)$$

$$= h \underbrace{\left(g'(x_0) + \omega_2(h)\right) \omega_1(h)}_{\omega_3(h) \to 0 \text{ per } h \to 0} = o(h)$$

ESERCIZI

(1) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+3x} + x \quad [+\infty - \infty]$

Pongo $y = -x$. Quando $x \to -\infty$, ho che $y \to +\infty$

$$= \lim_{y \to +\infty} \sqrt{y^2-3y} - y$$

$$\Big(\overset{A}{\sqrt{y^2-3y}} \overset{-B}{-y}\Big) \frac{\overset{A}{\sqrt{y^2-3y}} \overset{+B}{+y}}{\sqrt{y^2-3y}+y} = \frac{\overset{A^2 \quad - \quad B^2}{\cancel{y^2} - 3y - \cancel{y^2}}}{\sqrt{y^2-3y}+y} =$$

$$= \frac{-3y}{\sqrt{y^2-3y}+y} = \frac{-3\cancel{y}}{\cancel{y}\left[\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{y}}_{\to 0}}+1\right]} \longrightarrow -\frac{3}{2}$$

(2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2} = 1 \qquad \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2} \boxed{- \cos x + 1} - 1}{x^2} = \underbrace{\boxed{\frac{1-\cos x}{x^2}}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}}}_{\frac{1}{2}} \to 1$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x^2} - \cancel{1}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+x^2} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \to \frac{1}{2}$$

(3) DA TABELLINA

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \log x = \quad [0 \cdot (-\infty)]$$

$x = e^y$

Pongo $y = \log x$. Quando $x \to 0^+$, ho che $y \to -\infty$

$$= \lim_{y \to -\infty} e^y \cdot y$$

Pongo $z = -y$. Quando $y \to -\infty$, ho che $z \to +\infty$

$$= \lim_{z \to +\infty} e^{-z} \cdot (-z) = \lim_{z \to +\infty} -\frac{z}{e^z} = 0$$

potenza / esponenz.

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \log x = 0.$$ Non cambia anche se metto $x^a \cdot \log x \quad a > 0$

④ $\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x}$ $[0^0]$ $= e^0 = 1.$

$x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \log x}$

Basta fare il lim. dell'esponente.

$\sin x \cdot \log x = \boxed{\dfrac{\sin x}{x}} \cdot \boxed{x \log x} \longrightarrow 0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad 0$

⑤ $\lim_{x \to 0^+} x^{\arctan \sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\arctan \sqrt{x} \cdot \log x} = e^0 = 1$

$$\arctan\sqrt{x}\cdot\log x = \boxed{\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\cdot\boxed{\sqrt{x}\,\log x} \to 0$$

$\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \to 1$ $\qquad$ $\sqrt{x}\,\log x \to 0$ $\quad a = 1/2$

(6) $$\lim_{n\to+\infty} n^2 \arctan\frac{6n}{3n^3+5} = 2 \qquad \left[+\infty \cdot \arctan(\underset{0}{\overset{\shortparallel}{0}})\right]$$

$$n^2\arctan\frac{6n}{3n^3+5} = \boxed{n^2}\ \boxed{\frac{\arctan\frac{6n}{3n^3+5}}{\frac{6n}{3n^3+5}}}\cdot\boxed{\frac{6n}{3n^3+5}}$$

$$\frac{\arctan\frac{6n}{3n^3+5}}{\frac{6n}{3n^3+5}} \to 1$$

Pongo $x = \frac{6n}{3n^3+5}$

... $x \to 0$

$$\frac{6n^3}{3n^3+5} \to 2$$

7 $$\lim_{n \to +\infty} n\left(\sqrt[n]{37} - 1\right)$$ $+\infty(1-1)$

$$n\left(\sqrt[n]{37} - 1\right) = n\left(37^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(e^{\frac{1}{n}\log 37} - 1\right)$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{e^{\frac{1}{n}\log 37} - 1}{\frac{1}{n}\log 37}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{\log 37}}_{\to \log 37} = \log 37$$

$x = \dfrac{\log 37}{n} \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \longrightarrow 1$$

8

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right) = 0$$

$[+\infty \cdot (1-1)]$

$$\sqrt{n}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right) = \sqrt{n}\left(e^{\boxed{\frac{1}{n}\log n}}-1\right)$$

x

$x = \frac{\log n}{n} \to 0$

$$= \boxed{\frac{e^{\frac{1}{n}\log n}-1}{\frac{\log n}{n}}} \boxed{\frac{\log n}{n}\sqrt{n}} \to 0$$

$\downarrow$ 1

$\frac{\log n}{\sqrt{n}}$

$\downarrow$ 0

(9) $$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \qquad [1^\infty]$$

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log(\cos x)} \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \frac{\log(1+\cos x - 1)}{x^2} =$$

$$= \boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}\ \boxed{\frac{\log(1+\cos x - 1)}{\cos x - 1}} \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} \downarrow -\frac{1}{2} \qquad \frac{\log(1+\cos x - 1)}{\cos x - 1} \,\|\, \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Pongo $y = \cos x - 1$. Quando $x \to 0$, ho che $y \to 0$