MAT 1 TLC

**ORA 19**

Titolo nota 17/10/2006

$\boxed{\text{o piccolo}}$

<u>Def.</u> Siano $f$ e $g$ due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che $f$ è o piccolo di $g$ per $x \to x_0$ (e scriviamo

$$\boxed{f = o(g) \quad \text{per } x \to x_0}\ )$$

se esiste una funzione $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

(i) $f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

(ii) $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$

$f = g \cdot$ funzione che tende a zero

Definizione quasi equivalente. Supponiamo di poter dividere per $g(x)$, cioè che $g(x) \neq 0$ almeno per $x \neq x_0$

Allora

(i) si riscrive come $\omega(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(ii) si riscrive come $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$

Oss. Supponiamo per un momento che $f$ e $g$ tendano a $0$ per $x \to x_0$. Allora

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ sarebbe una forma $\dfrac{0}{0}$.

La (ii) ci dice che $f$ "batte $g$".

Quindi, detto brutalmente, $f = o(g)$ per $x \to x_0$ vuol dire "$f$ tende a zero + velocemente di $g$ per $x \to x_0$"

perché in realtà non è detto che $f$ e $g$ tendano a zero, e non è detto che si possa dividere per $g$.

<u>Esempi</u> $\boxed{1}$ $\underbrace{x^3}_{f(x)} = o(\underbrace{x}_{g(x)})$ per $x \to 0$ $\boxed{\text{VERA}}$

Devo poter scrivere

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x \to 0} \omega(x) = 0$$

$$x^3 = x \cdot x^2 \qquad \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

$\boxed{2}$ $\underbrace{x^2}_{f(x)} = o(\underbrace{\sin x}_{g(x)})$ per $x \to 0$

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$$

$$x^2 = \sin x \cdot \frac{x^2}{\sin x}$$

definita almeno per $x$ vicini a $0$ e diversi da $0$

Calcolo

$$\lim_{x\to 0} \omega(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{x}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{x}{\sin x}}}_{\downarrow\, 1} = 0$$

$\boxed{3}$ $\sin x = o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to 0$ ? SI, VERA

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$$

$$\sin x = \frac{1}{x} \cdot x \sin x$$

$\boxed{\text{N.B. } g(x) \text{ non tende a zero per } x \to 0}$

$$\lim_{x\to 0} \omega(x) = 0 \cdot 0$$

# Operazioni algebriche su o piccolo

Supponiamo che $f_1 = o(g)$ per $x \to x_0$

$f_2 = o(g)$ per $x \to x_0$

Cosa possiamo dire di $\underbrace{f_1 \pm f_2}_{o(g) \pm o(g)}$, $\lambda f_1$, $\underbrace{f_1 \cdot f_2}_{o(g) \cdot o(g)}$, $\dfrac{f_1}{f_2}$, ...

Hp. $f_1(x) = g(x) \cdot \omega_1(x)$ $\qquad \lim_{x \to x_0} \omega_1(x) = 0$

$f_2(x) = g(x) \cdot \omega_2(x)$ $\qquad \lim_{x \to x_0} \omega_2(x) = 0$

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x) \underbrace{\{\omega_1(x) + \omega_2(x)\}}_{\omega_3(x)} = g(x)\, \omega_3(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \to x_0} \left( \omega_1(x) + \omega_2(x) \right) = 0 + 0 = 0$$

Conclusione $\quad f_1 + f_2 = o(g)$. Allo stesso modo $f_1 - f_2 = o(g)$

$o(g) + o(g) = o(g)$ $\qquad\qquad$ $o(g) - o(g) = o(g)$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = g(x)\, \omega_1(x) \cdot g(x) \cdot \omega_2(x)$$

$$= g^2(x) \underbrace{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}_{\omega_3(x)} = g^2(x) \cdot \omega_3(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \to x_0} \left( \omega_1(x) \cdot \omega_2(x) \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

Conclusione $\quad f_1 \cdot f_2 = o(g^2)$ $\qquad$ $o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$

Dato un numero $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda f_1(x) = \lambda g(x)\,\omega_1(x) = g(x) \cdot \underbrace{\lambda \omega_1(x)}_{\omega_3(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \omega_3(x) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Conseguenza $\lambda f_1 = o(g)$ $\qquad \lambda\, o(g) = o(g)$

<u>Rapporto</u> $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\cancel{g(x)}\,\omega_1(x)}{\cancel{g(x)}\,\omega_2(x)}$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)}$ è $\dfrac{0}{0}$

e non ci sono elementi per decidere

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{BOH !!!}$$

Supponiamo che $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$.

Posso concludere che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$? $\boxed{S1}$

$$\boxed{o(x^3) \Longrightarrow o(x)}$$

Hp $\quad f(x) = x^3 \omega(x) \qquad \lim_{x \to 0} \omega(x) = 0$

$$= x \underbrace{\left(x^2 \omega(x)\right)}_{\omega_3(x)}$$

$$= x \cdot \omega_3(x) \qquad \lim_{x \to 0} \omega_3(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \omega(x)$$

$$= 0 \cdot 0 = 0$$

$\boxed{\text{SVILUPPINI}}$ Limiti notevoli e o piccolo. Tutti per $\boxed{x \to 0}$

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin x &= x + o(x)\\
\cos x &= 1 + o(x)\\
\tan x &= x + o(x)\\
e^x &= 1 + x + o(x)\\
\log(1+x) &= x + o(x)\\
\arctan x &= x + o(x)\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}}$$

$\sin x = x + o(x)$

$\underbrace{\sin x - x}_{f(x)} = \underset{\substack{\uparrow \\ g(x)}}{o(x)}$ per $x \to 0$

$f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$ oppure, visto che posso dividere per $g(x)$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left( \frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

$e^x = 1 + x + o(x)$ vuol dire che $e^x - 1 - x = o(x)$

Dividendo per $g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

Per esercizio verificare le altre.

<u>Oss.</u> Supponiamo che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$.

Cosa posso dire di $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\,\omega(x)}{\cancel{x}} = 0$

Brutalmente $\dfrac{o(x)}{x} \longrightarrow 0$, $\dfrac{o(x^2)}{x^2} \longrightarrow 0$

Esempio $\sin x^2 = o(x)$ VERA

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$$

$$\sin x^2 = x \cdot \frac{\sin x^2}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \boxed{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \boxed{x} = 0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \quad \cdot \quad 0$$

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + e^x - \cos x + \arctan x^2}{\log(1+3x) - 5x} = -1$$

Per es: $o(3x) = o(x)$

$$= \frac{x + o(x) + \cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} - o(x) + o(x)}{3x + o(3x) - 5x} = \frac{2x + o(x)}{-2x + o(x)}$$

$$= \frac{\cancel{x}\left(2 + \frac{o(x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-2 + \frac{o(x)}{x}\right)} \to \frac{2}{-2} = -1$$

$\frac{o(x)}{x} \to 0$

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 20}}$

Come dimostrare che un limite di funzioni non esiste

Ci si basa sul criterio FUNZIONI → SUCCESSIONI. Supponiamo

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Sia $a_n$ una qualunque succ. t.c. $a_n \to x_0$

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad (\text{stesso } l)$$

Pongo $a_n = x$

Quando $n \to +\infty$,

ho che $x \to x_0$

Supponiamo che esistano 2 successioni $a_n \to x_0$
$b_n \to x_0$

e supponiamo che

$f(a_n) \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$

$l_1 \neq l_2$.

$f(b_n) \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste (se esistesse e fosse un certo $l$, dovrei avere $l = l_1 = l_2$).

<u>Esempio</u> $\lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ non esiste.

<u>Dim</u>. Devo trovare 2 succ. $a_n \to 0^+$
$b_n \to 0^+$ t.c.

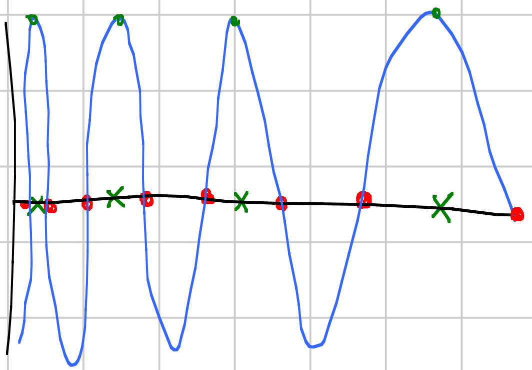
$\sin \frac{1}{a_n} \to \ell_1$ $\qquad$ $\sin \frac{1}{b_n} \to \ell_2$ $\qquad$ $\ell_1 \neq \ell_2$

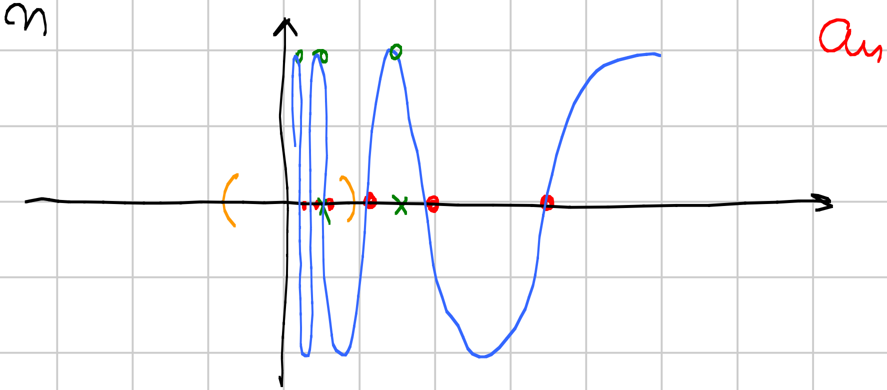
Cerco $a_n$ in modo che sia $\sin \frac{1}{a_n} = 0$, cioè $\frac{1}{a_n} = \pi n$

Quindi $a_n = \frac{1}{\pi n}$ $(\to 0^+)$.

Cerco $b_n$ in modo che sia $\sin \frac{1}{b_n} = 1$, cioè $\frac{1}{b_n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

quindi $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0^+$





# Esercizi misti

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+27} - \sqrt{x+25} \qquad [\infty - \infty]$$

$$\left(\overset{A}{\sqrt{x+27}} - \overset{B}{\sqrt{x+25}}\right) \frac{\overset{A}{\sqrt{x+27}} + \overset{B}{\sqrt{x+25}}}{\sqrt{x+27} + \sqrt{x+25}} = \frac{\overset{A^2 - B^2}{\cancel{x} + 27 - \cancel{x} - 25}}{\sqrt{x+27} + \sqrt{x+25}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x+27} + \sqrt{x+25}} = \frac{2}{+\infty + \infty} \to 0$$

$$\text{——— } 0 \text{ ———}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = 0$$

$$(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \quad \frac{\sqrt[3]{\ldots} + \sqrt[3]{\ldots} + \sqrt[3]{\ldots}}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt[3]{\ldots}+\sqrt[3]{\ldots}+\sqrt[3]{\ldots}} \to 0$$

$$A - B \qquad A^2 + AB + B^2$$

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt[3]{x}$$

$$\frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{1/6}}$$

Raccolgo $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \underbrace{\sqrt{x}}_{+\infty}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}} - \frac{1}{x^{1/6}}\right)}_{1} \longrightarrow +\infty$$

$$\frac{5}{x} \to 0 \qquad \frac{1}{x^{1/6}} \to 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n! \, 2^n}{n^n}}}_{a_n}$$

Applico criterio radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n! \cdot 2^n}{n^n}} = \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}}_{\to \frac{1}{e}} \cdot 2 \to \frac{2}{e}$$

$$\sqrt[n]{a_n} \to \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow a_n \to 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n! \, 3^n}{n^n}$$

Radice $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$

— o — o —

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n! \, (2n)!}{(3n)!}}}_{a_n}$$

Rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)! \, (2n+2)!}{(3n+3)!}}{\dfrac{n! \, (2n)!}{(3n)!}} =$$

$$= \frac{(n+1)!\,(2n+2)!}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n!\,(2n)!}$$

$$\frac{4\cancel{n^3}}{27\cancel{n^3}}$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{n!}\,(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}} \cdot \frac{\cancel{(3n)!}}{\cancel{n!}\,\cancel{(2n)!}} \longrightarrow \frac{4}{27} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \longrightarrow 0$$

$(2n+2)! =$ prodotto degli interi pos. fino a $2n+2$

$$= (2n+2)(2n+1)\underbrace{(2n)(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot\ldots}_{(2n)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\underbrace{\boxed{\frac{n!\,(2n)!}{(3n)!}}}_{a_n}} = \frac{4}{27}$$

RAPPORTO → RADICE

Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to l$

Fatto prima $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{4}{27} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to \frac{4}{27}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n + n^5}{3^n + n^7}} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt[n]{\frac{5^n\left(1+\frac{n^5}{5^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{n^7}{3^n}\right)}} = \frac{5}{3}\boxed{\left(\frac{1+\frac{n^5}{5^n}}{1+\frac{n^7}{3^n}}\right)^{\frac{1}{n}}} \nearrow \left(\frac{1}{1}\right)^0 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x^8} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(5^x + x^5)}{x}$$

Brutalmente $\dfrac{\log(5^x)}{x} = \dfrac{\cancel{x} \log 5}{\cancel{x}} = \log 5$

Rigoroso

$$\frac{\log 5^x \left(1 + \frac{x^5}{5^x}\right)}{x} = \frac{\log 5^x + \log(\ )}{x} = \frac{x \log 5 + \log(\ )}{x}$$

$$= \frac{\cancel{x}\left(\log 5 + \boxed{\frac{\log(\ )}{x}}\right)}{\cancel{x}} \qquad \frac{\log 1}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0 \qquad \longrightarrow \log 5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{200}}$$

$$x^{200} = e^{\boxed{\ldots\ldots}} \qquad = \log x^{200} = 200 \log x$$

$$\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{200}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{200 \log x}} = e^{\sqrt{x} - 200 \log x} \longrightarrow e^{+\infty} = +\infty$$

Basta fare il limite dell'esponente

$$\sqrt{x} - 200 \log x = \underbrace{\sqrt{x}}_{\downarrow\ +\infty} \left( 1 - 200 \underbrace{\frac{\log x}{\sqrt{x}}}_{\downarrow\ 0} \right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$