MAT 1 TLC

ORA 17

Titolo nota 14/10/2006

Strumenti per limiti di funzioni:

* confronto a 2 e carabinieri
* teoremi alg. (somma, prodotto, esponenziale): funziona tutto bene tranne nei casi

$$+\infty-\infty,\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0^0,\quad 1^{\pm\infty},\quad (\pm\infty)^0$$

Inoltre: attenzione quando c'è 0 al denom. (0^+, 0^-)

* Il rapporto non ha molto senso per i limiti di funz.
* La radice va bene, ma solo quando $x\to+\infty$.

LIMITI NOTEVOLI

PADRI: $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

FIGLI: $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

NIPOTI: $\lim_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a = \log_e a = \ln a$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

ALTRO FIGLIO $\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Cambio di variabili nei limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$ Dato per buono

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$$

Pongo $x^2 = y$. Quando $x \to 0$, anche $y \to 0$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$$

Pongo $y = \sin x$. Quando $x \to 0$ anche $y \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$$

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \to 0$, si ha che $y \to 1 = \cos 0$

$$= \lim_{\boxed{y \to 1}} \frac{\sin y}{y} = \sin 1$$ $\left[\frac{\sin y}{y} \text{ è continua in } y = 1 \right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \boxed{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}} \cdot \boxed{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

$\downarrow$ FATTO PRIMA $\quad \downarrow$ PADRE

$1 \qquad 1$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ Divido per $x>0$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$0 \quad 0 \quad 0$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

stesso motivo

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos x}{x}$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

Divido per $x<0$ dunque giro i versi

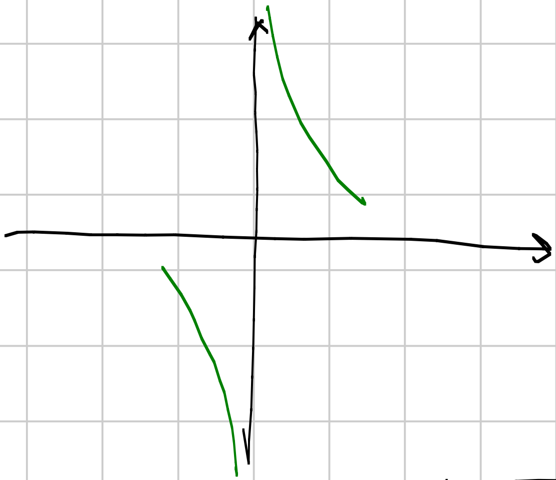
$$0 \leftarrow -\frac{1}{x} \geq \frac{\cos x}{x} \geq \frac{1}{x} \to 0$$

$\frac{\cos x}{x} \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x} \quad \text{N.E.}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x} \quad \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{x} \quad \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$



$\boxed{\text{CRITERIO FUNZIONI} \to \text{SUCC.}}$

Le funzioni aiutano le successioni

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Pongo $\frac{1}{n} = x$. Quando $n \to +\infty$, ho che $x \to 0$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dico che è 1 quello iniziale

Se il limite di funzioni ottenuto dà un certo $l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora il limite di succ. iniziale è lo stesso l.

Se il limite di funzioni non esiste, NON SI PUÒ DIRE NULLA (il limite di succ. potrebbe esistere).

<u>Esempio</u> $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ N.E.

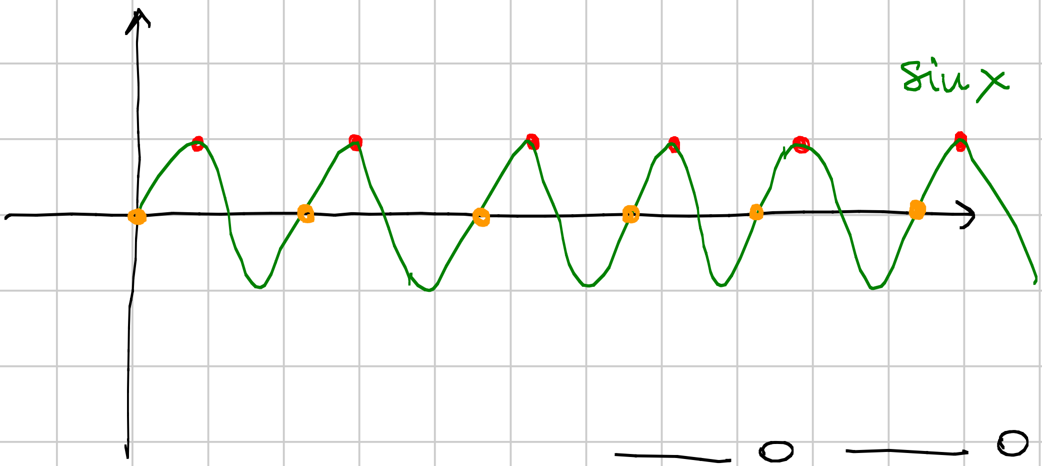
$$\lim_{n \to +\infty} \sin(2\pi n) = \lim_{x \to +\infty} \sin x$$

Pongo $x = 2\pi n$. Quando $n \to +\infty$, ho che $x \to +\infty$

Questo non esiste, dunque l'uguaglianza NON è detta

Infatti $\lim_{n \to +\infty} \sin(2\pi n) = 0$

Tutti i termini della succ. sono $= 0$



sin $(2\pi n)$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

— o — o —

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\boxed{1-\cos^2 x}}^{\sin^2 x}}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\boxed{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}}_{1^2}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{1+\cos x}}}_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

Funzione continua

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = 1$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \quad \cos x \to 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} =$$

Pongo $y = \arctan x$. Quando $x \to 0$, ho che $y \to 0 = \arctan 0$.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

Inoltre $x = \tan y$ (siamo nella zona in cui si può fare)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

Pongo $y = \arcsin x$ .....

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Pongo $y = -x$. Quando $x \to -\infty$, ho che $y \to +\infty$. Inoltre $x = -y$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y} = \boxed{\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1}} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e$$

Posto $y-1 = z$

$$\lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$$

Teo. alg.

1

MAT 1 TLC

ORA 18

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ . Quindi}$$

[è come se avessi fatto $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$]

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right] = 1 = \log e$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

Pongo $\frac{1}{x}=y$. Quando $x\to+\infty$, ho che $y\to 0^+$. Inoltre $x=\frac{1}{y}$

$$= \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\log(1+y) = 1 .$$

$$\lim_{y\to 0^-}\frac{1}{y}\log(1+y) = \lim_{x\to-\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \log \left[\boxed{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} \right] = \log e = 1$$

e anche per $x \to -\infty$

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

Pongo $\log(1+x) = y$.
Quando $x \to 0$, ho che $y \to \log 1 = 0$.
Inoltre $1+x = e^{y}$, quindi $x = e^{y} - 1$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{y}{e^{y}-1}$$

— o — o —

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Perché? Non ve lo dico, ma si deduce con passaggi opportuni dall'analogo limite con le succ.

— o — o —

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Supponiamo di sapere che

$$\sin x \leq x \leq \tan x \qquad \text{per ogni } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Quando $x \to 0^+$, entra in questa zona.

Divido per $\sin x$ conservando i versi

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

$$\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}}$$

Per $x \to 0^-$. La funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ è pari.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

sin è DISPARI

Se $f(x)$ è pari, allora $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ Pongo $y = -x$. Quando $x \to 0^-$, ho che $y \to 0^+$

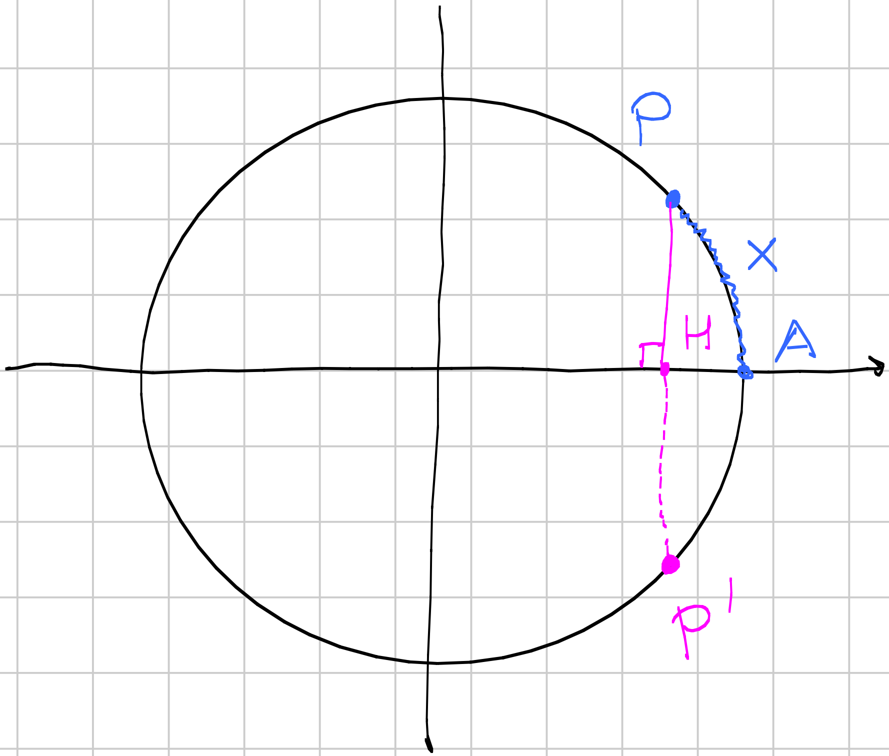
$= \lim\limits_{y \to 0^+} f(-y) = \lim\limits_{y \to 0^+} f(y)$

f è PARI

Es. f dispari $\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\lim_{x \to 0^-} f(x)$$

Resta da dimostrare che $\sin x \leq x \leq \tan x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$



$x =$ lungh. arco AP

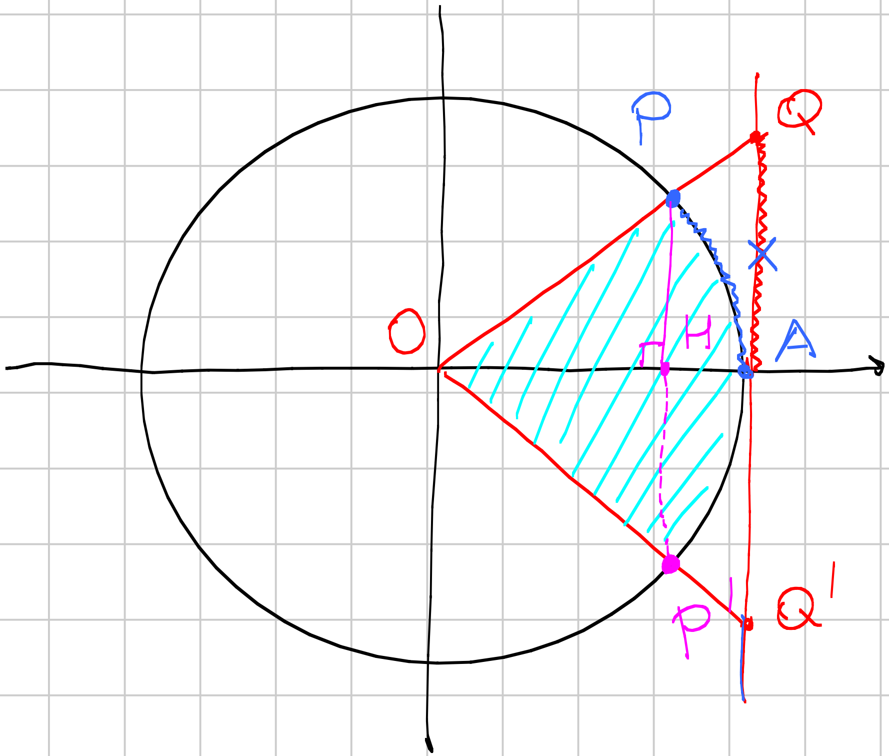
$\sin x =$ lungh. di PH

$2x =$ lungh. arco $\overset{\frown}{PP'}$

$2 \sin x =$ lungh. segmento $\overline{PP'}$

segm. $\leq$ arco

$\cancel{2} \sin x \leq \cancel{2} x$



$$\text{Area } OQQ' = \frac{1}{2} QQ' \cdot OA$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \tan x \cdot 1$$
$$= \tan x$$

$$\text{Area Sett} = \frac{\cancel{\pi} \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2\pi}} = x$$

$$\text{Area Sett} \leq \text{Area } OQQ'$$
$$x \leq \tan x$$

Area Settore : Area Cerchio = angolo settore : 2π

Area Sett : π = $2x$: 2π

Esercizio 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \boxed{\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}} \cdot \boxed{\frac{\tan x}{x}} = 1$$

$y = \tan x$

$y \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$$

$\frac{\tan x}{x} \to 1$

Es. 2
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{\sin(\arctan x)} = -1$$

$$\frac{\cos x - e^x}{\sin(\arctan x)} \cdot \frac{\arctan x}{\arctan x} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\boxed{\frac{\arctan x}{\sin(\arctan x)}} \cdot \boxed{\frac{x}{\arctan x}} \cdot \boxed{\frac{\cos x - e^x}{x}} \to -1 \to -1$$

$y = \arctan x$

$\downarrow$ 1 $\qquad \downarrow$ 1

$$= \frac{\cos x - 1 + 1 - e^x}{x}$$

$$= \frac{\cos x - 1}{x} + \frac{1 - e^x}{x}$$

$$\boxed{x} \cdot \boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}} + \boxed{\frac{1-e^x}{x}}$$

$$0 \cdot -\frac{1}{2} \qquad -1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Pongo $x - \frac{\pi}{2} = y$

Quando $x \to \frac{\pi}{2}$, ho che $y \to 0$

$x = \frac{\pi}{2} + y$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)}{y} =$$

[Precorso: archi associati]

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-\sin y}{y} = -1.$$