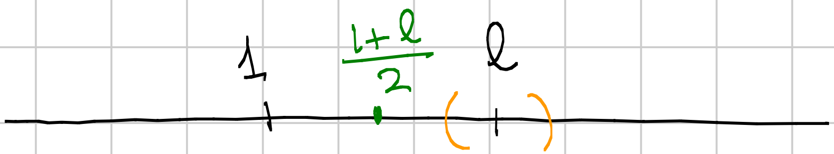
Giustificazione criterio radice

$\boxed{1° \text{ caso}}$

$$\underline{\text{Hp}} \quad \left.\begin{array}{l} a_n \geq 0 \\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell > 1 \end{array}\right\} \quad \underline{\text{Tesi}} \quad a_n \longrightarrow +\infty$$



$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell$, ma allora $\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{1+\ell}{2}$ definitiv.,

ma allora elevando alla n-esima

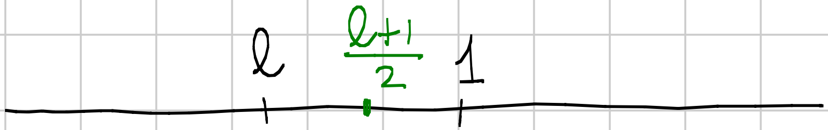
$$\underbrace{a_n}_{\downarrow\, +\infty} \geq \underbrace{\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n}_{\downarrow\, +\infty}$$

espon, con base > 1

confronto a 2

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$ Hp $a_n \geq 0$ Tesi $a_n \to 0$

$\sqrt[n]{a_n} \to l < 1$



$\frac{l+1}{2} < 1$

Se $\sqrt[n]{a_n} \to l < 1$, allora defin. $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$, quindi

$$0 \overset{Hp}{\leq} a_n \leq \boxed{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

Carab.

esponenz. con base < 1

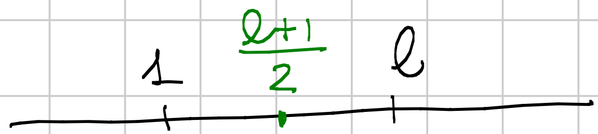
— o — o —

"DIM" CRITERIO RAPPORTO

$\boxed{1° \text{ caso}}$ Hp $a_n > 0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l > 1$

Tesi: $a_n \to +\infty$



$\frac{l+1}{2} > 1$

se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l > 1$, allora

definitiv. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$ ← Questa vale solo definit. Facciamo finta che valga sempre

$\frac{a_1}{a_0} \geq \frac{l+1}{2}$, $\boxed{a_1 \geq \frac{l+1}{2} a_0}$

$\frac{a_2}{a_1} \geq \frac{l+1}{2}$, $a_2 \geq \frac{l+1}{2} a_1 \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 a_0$

$\frac{a_3}{a_2} \geq \frac{l+1}{2}$, $a_3 \geq \frac{l+1}{2} a_2 \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^3 a_0$

In questo modo si dimostra (per induzione: FARLA FORM.)

che

$$a_n \geq \boxed{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n a_0}$$

$$a_n \to +\infty \qquad \left(\frac{l+1}{2}\right)^n a_0 \to +\infty \cdot \underbrace{a_0}_{>0} = +\infty$$

Stessa cosa (fare per esercizio) succede nel 2° caso ($l<1$)

Se invece di avere $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$ sempre abbiamo che è vero solo per $n \geq n_0$, allora vorrà dire che l'induzione deve partire da $n = n_0$ e si dim. una disug.

$$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \qquad \forall n \geq n_0$$

SUCCESSIONI MONOTONE

Una successione a_n si dice

- DEB. CRESC. se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- STRETT. CRESC. se $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- DEB. DECR. se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- STRETT. DECR. se $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$

$m > n \Rightarrow a_m > a_n$

$m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$

$m > n \Rightarrow a_m < a_n$

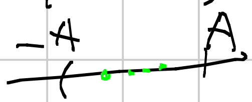
equivalenti

a_n si dice limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

" " inferiormente " " $a_n \geq M$ "

" LIMITATA se valgono entrambe oppure (equiv.)

se $\exists A \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n| \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$



$\boxed{\text{Teo. succ. MONOTONE}}$ Sia a_n una succ. DEB. CRESC.
(se è STRETT, ancora meglio).

Allora ci sono solo 2 tipi di comportamento possibile

* $a_n \to l \in \mathbb{R}$
* $a_n \to +\infty$

sottoinsieme della retta
costituito dai p.ti della succ.
(ELENCO)

Inoltre $l = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Se in aggiunta supponiamo che a_n sia LIMITATA SUPER.
allora di sicuro $l \in \mathbb{R}$.

Sia a_n una succ. DEB. DECR. (se è STRETT., ancora meglio)

Allora ci sono solo 2 possibili comport.

* $a_n \to l \in \mathbb{R}$
* $a_n \to -\infty$

Inoltre $l = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Se in aggiunta supponiamo a_n LIMITATA INFERIORMENTE, allora di sicuro $l \in \mathbb{R}$.

Dim. caso CRESCENTE

$\boxed{1° \text{ CASO}}$

Hp: $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

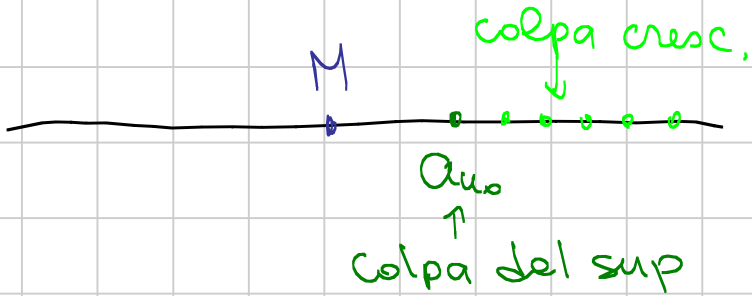
a_n deb. cresc.

$\Updownarrow$

$\forall M \in \mathbb{R}$, esiste un el. della succ. $\geq M$

cioè esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$a_{n_0} \geq M$$



Tesi: $a_n \longrightarrow +\infty$

$\Updownarrow$

$\forall M \in \mathbb{R}$, $a_n \geq M$ definit.

Grazie al fatto che a_n è (deb.) cresc.

Se $a_{n_0} \geq M$, allora

$a_n \geq M \quad \forall n \geq n_0$,

cioè defin.

$\boxed{2^\circ \text{ CASO}}$

SE a_n STRETT. CRESC., allora $a_n \to l^-$

Hp a_n deb. cresc.

$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = l < \mathbb{R}$

Tesi $a_n \to l$

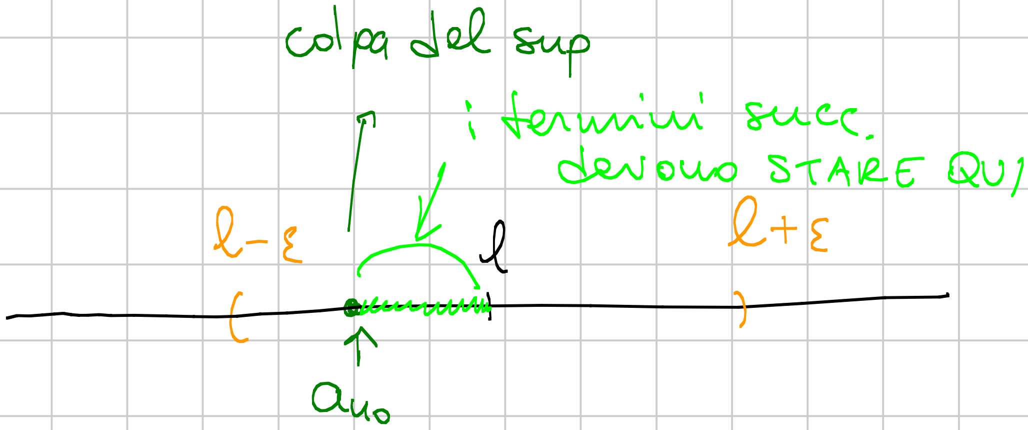
$\forall \varepsilon > 0, \; l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ defin.

$a_n \leq l$ sempre

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \, a_{n_0} \geq l - \varepsilon$

Quindi definitiv.

$l - \varepsilon \leq a_n \leq l$



Oss. Non è detto che $a_n \to l^-$, perché per farlo occorre $a_n < l$ sempre. Essendo a_n solo DEB. CRESC. potrebbe anche essere $a_n = l$ SEMPRE

MAT 1 TLC

ORA 16

LIMITI DI FUNZIONI

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

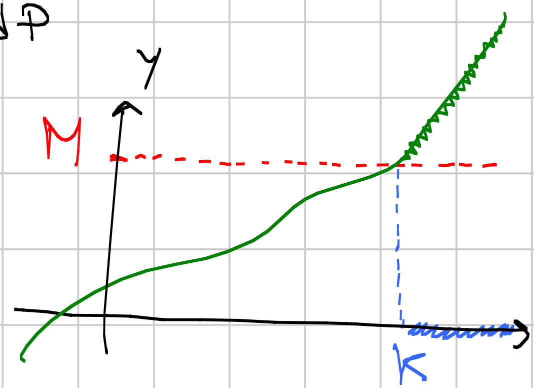
solo su un sottoinsieme

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $\quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Ciascuno di questi può avere 4 possibili comportamenti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & (1) \\ +\infty & (2) \\ -\infty & (3) \\ \text{NON ESISTE} & (4) \leftarrow \text{NdP} \end{cases}$$



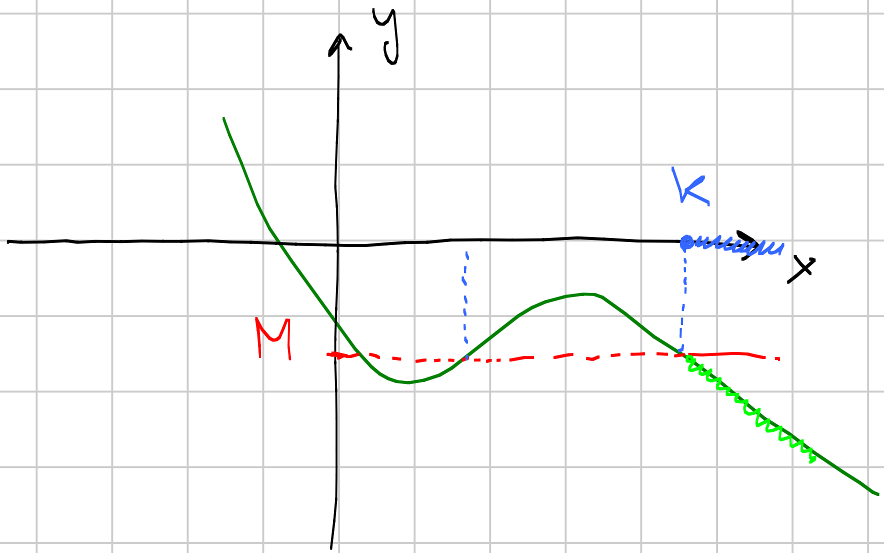
Def. di (2) $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $\exists k \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geq M \quad \forall x \geq k$$

Def. di (3) $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists k \in \mathbb{R}$

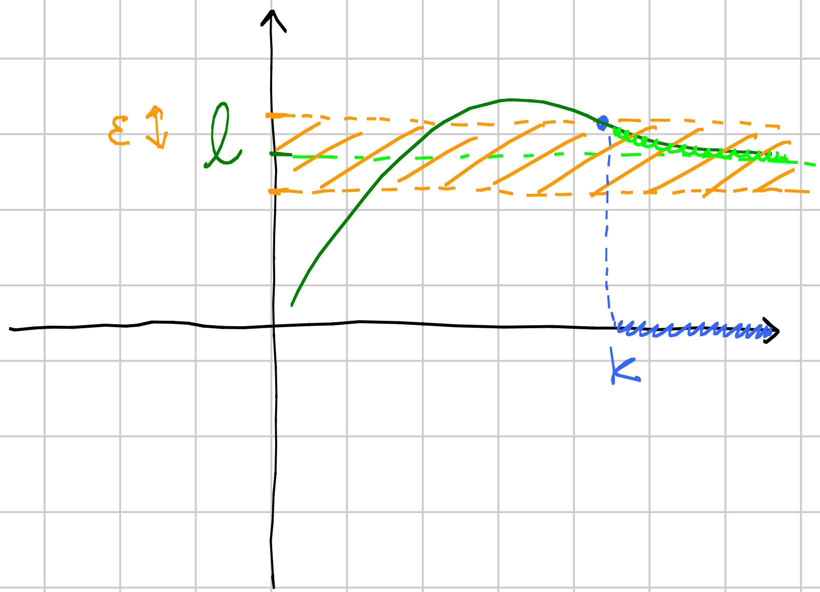
t.c. $f(x) \leq M$

$\forall x \geq k$



Def. di 1 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \forall x \geq k$$



1 bis $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell^+$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

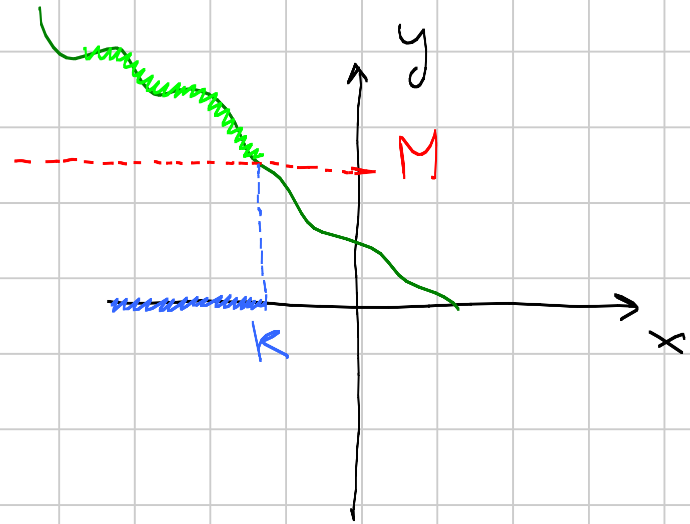
$$\ell < f(x) \leq \ell + \varepsilon \qquad \forall x \geq k$$

IMPORTANTE

1 ter $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell^-$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

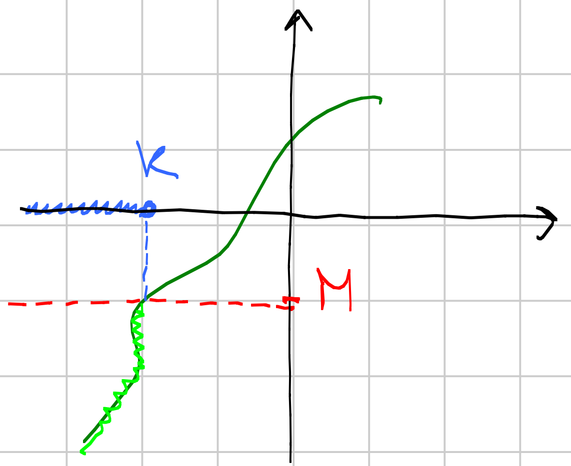
$$\ell - \varepsilon \leq f(x) < \ell \qquad \forall x \geq k$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \begin{cases} l\in\mathbb{R} & ① \\ +\infty & ② \\ -\infty & ③ \\ \text{NON ESISTE} & ④ \ \text{NdP} \end{cases}$$



Def ② $\forall M\in\mathbb{R}$ (anche enorme) $\exists K\in\mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geq M \qquad \forall x \leq K$$



Def. ③ $\forall M\in\mathbb{R}$ (anche enorm. negat.)

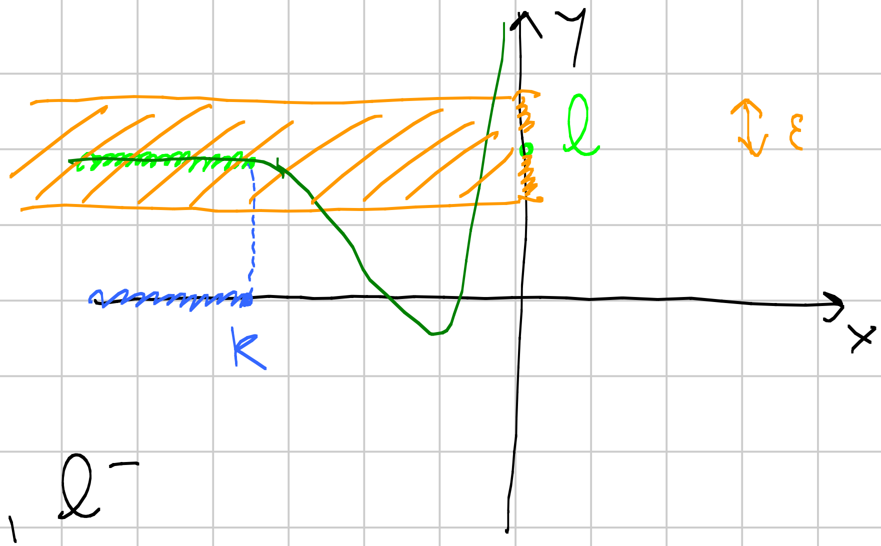
$\exists K\in\mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \leq M \qquad \forall x \leq K$$

Def. (1) $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - l| \le \varepsilon \quad \forall x \le k$$



Idem per $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l^+,\ l^-$

— o — o —

Sia ora $x_0 \in \mathbb{R}$

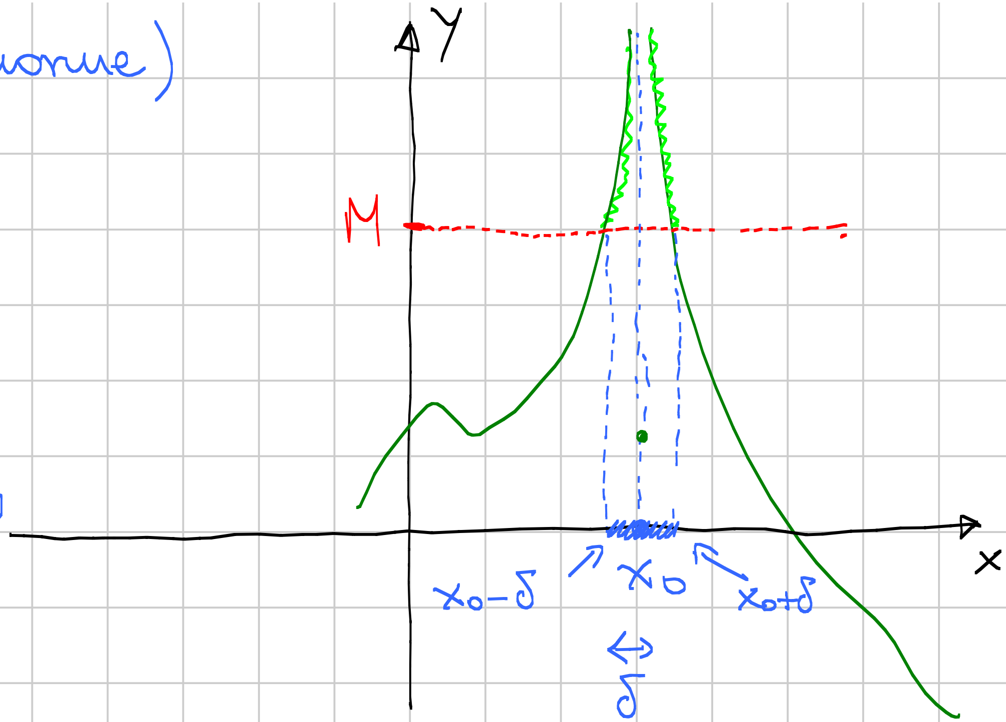
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \ (l^+, l^-) & (1) \\ +\infty & (2) \\ -\infty & (3) \\ \text{NON ESISTE} & (4) \ \text{NEP} \end{cases}$$

Def. di (2) $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ t.c.

$f(x) \geq M$

$\underbrace{\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \setminus \{x_0\}}_{\text{intervallo meno il punto } x_0}$



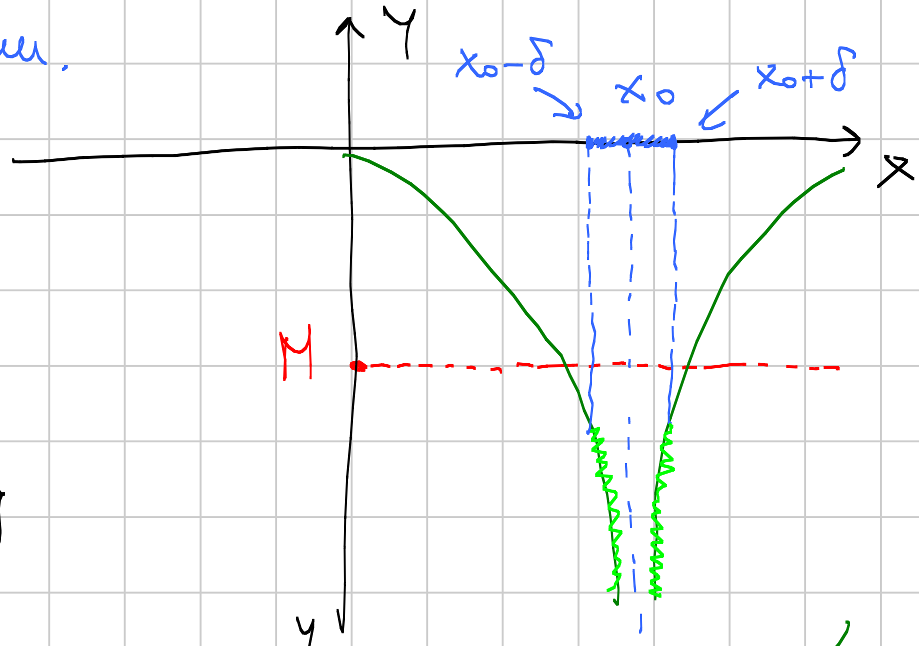
Il limite guarda cosa accade per x vicino ad x_0 e se ne frega di quello che accade in $x=x_0$ → in questo punto f potrebbe anche non essere definita.

Def. di ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. neg.)

$\exists \delta > 0$ t.c.

$$f(x) \leq M$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

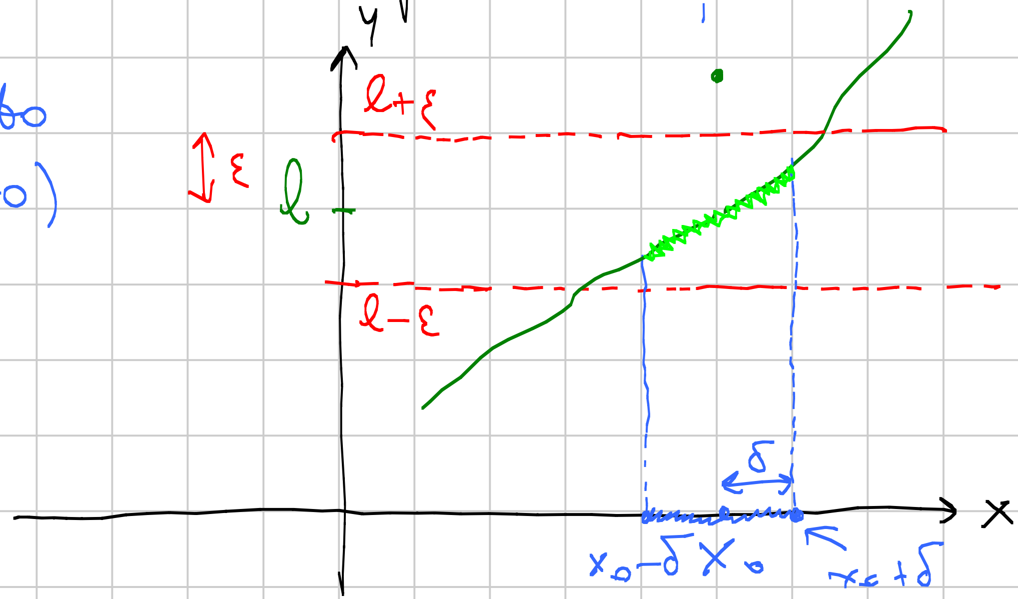


Def. di ① $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$\exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$



$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ldots$$

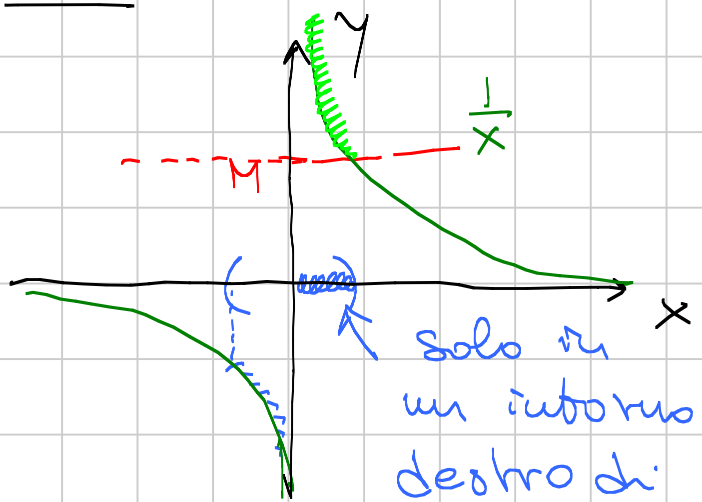
Le disuguaglianze richieste su $f(x)$ devono valere

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta]$$

esclude il p.to x_0

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ldots \qquad \forall x \in [x_0-\delta, x_0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad \text{NON ESISTE}$$



solo in un intorno destro di $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

DEF. Se succede che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(cioè il valore in $x = x_0$ è quello che vorrebbe essere guardando gli x vicini a x_0)

si dice che $f(x)$ è CONTINUA nel p.to x_0

TEOREMA Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari (quelle presentate) $\underbrace{\text{usando op. alg. e/o composizioni}}$, è CONTINUA in tutti i punti in cui non presenta problemi burocratici (denomin. $= 0$, radici di roba < 0, log di roba ≤ 0, ...)

Esempio

$$\lim_{x \to 1} \boxed{\overbrace{\frac{\arctan((x-1)3^x) + x^2 - 6}{\sin(x-1) + 2^x}}^{f(x)}} = -\frac{5}{2}$$

Questa funzione NON ha nessun tipo di problema in $x=1$. Quindi è continua, dunque il limite è $f(1)$