MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 12}}$

Titolo nota 11/10/2006

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

<u>1° modo</u> : Devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $2^n \geq M$ definit.

$2^n \geq M$ → se $M \leq 1$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$ → cioè defin.

 → se $M \geq 1$ è vera $\forall n \geq \log_2 M$ → cioè defin.

<u>2° modo</u> ; abbiamo dim. per induzione che

$$2^n \geq n+1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

confronto a 2

$$2^n \to +\infty \qquad n+1 \to +\infty$$

Più in generale $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ se $a > 1$

Dim.: Se $a > 1$, posso scriverlo nella forma $a = 1+x$ con $x>0$

disug. di BERNOULLI, dim. per induzione

$$a^n = \underbrace{(1+x)^n}_{\to +\infty} \geq \underbrace{1+nx}_{\to +\infty}$$

confronto a 2

$+\infty$ (si usa che $x>0$)

Se $0<a<1$, allora $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$

Se $a\in(0,1)$ posso scrivere $a = \frac{1}{b}$ con $b = \frac{1}{a} > 1$

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \to 0 \qquad b^n \to +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 1 & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } 0\le a<1 \end{cases}}$$

← è una succ. di cui

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty}$$

Per induzione $n! \geq 2^n$ definitivamente.

si conclude con confronto a 2.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$$

Dim. abusiva: $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \to 2^0 = 1$

Per il momento nessuno ci autorizza a passare al limite negli esponenti

Disug. Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$. Pongo $x = \frac{1}{n}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ Estraggo $\sqrt[n]{\ }$

$$1 \quad \leftarrow \quad 1+\frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2} \geq 1$$

$\sqrt[n]{2} \to 1$

$1 \to 1$

Dim. con Bernoulli

uso che $\sqrt[n]{x}$ è crescente

$2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{2} \geq \sqrt[n]{1} = 1$

Più in generale $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a>0}$

<u>Teo. algebrico sull'esponenziale</u>. $a_n \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$

$b_n \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

$c_n = (a_n)^{b_n}$

Serve come ipotesi che $a_n > 0$

Allora $a_n \to (\ell_1)^{\ell_2}$ TRANNE nei casi

$0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$

N.B. 0^∞ non è indeterminata $\quad 0^\infty = 0$

— o — o —

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{27}}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(1{,}01)^n}{\sqrt{n}} = +\infty$$

— o — o —

STRUMENTI :

* criterio radice
* criterio rapporto
* criterio rapporto $\to$ radice

CRITERIO RADICE Sia $a_n \geq 0$ definitivamente

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

* se $l > 1$ (anche se $l = +\infty$), allora $a_n \to +\infty$
* se $0 \leq l < 1$, allora $a_n \to 0$
* se $l = 1$, allora BOH (non si può per ora concludere nulla, bisogna inventarsi altro)

— o — o —

CRITERIO RAPPORTO. Sia $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

Come sopra

— o — o —

Esempio $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^n} = a_n$ $\qquad \frac{+\infty}{+\infty}$

Applico criterio rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{\underbrace{2^{n+1}}_{2 \cdot \cancel{2^n}}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{2n^2} \longrightarrow \frac{1}{2} = l < 1$$

Poichè $l < 1$, si ha che $a_n = \frac{n^2}{2^n} \longrightarrow 0$

Esempio 2 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}$ $= a_n$

Provo a farlo con il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \longrightarrow 1 \Rightarrow \text{BOH}$$

— o — o —

$\boxed{\text{CRITERIO RAPPORTO} \to \text{RADICE}}$ Sia $a_n > 0$ defin.

Supponiamo che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (stesso l).

Conclusione pessimistica: se facendo il rapporto viene che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ (dunque BOH) è inutile provare success. con la radice, perché si sa già che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

— o — o —

Il contrario (se $\sqrt[n]{a_n} \to l$, allora anche $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$) non vale!!!! Può succedere (es: trovare un esempio) che $\sqrt[n]{a_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, ma $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ NON ha limite.

Se ce l'ha, coincidono

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 13}}$

Successioni e sottosuccessioni

Sia data una succ. a_n.

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, \dots$$

Prendiamo una successione n_k di indici

$$n_0 = 0, \; n_1 = 1, \; n_2 = 2, \; n_3 = 5, \; n_4 = 7, \; n_5 = 8, \; n_6 = 10$$

Costruisco ora la successione a_{n_k}: questa successione "pesca" solo gli elementi a_i che ho deciso di prendere con gli indici n_k. a_{n_k} si dice sottosuccessione

2 scuole di pensiero $\nearrow$ $\boxed{\text{gli indici } n_k \text{ devono essere presi in modo strett. crescente}}$

$\searrow$ gli indici n_k devono essere presi in modo che $n_k \to +\infty$ (posso fermarmi e prendere + volte lo stesso elem. e posso anche tornare indietro)

Esempi di sottosucc.

a_{2n} = sottosucc. costituita dai termine di indice pari

$a_0, a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$

a_{2n+1} = sottosucc. dei dispari : $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, \dots$,

a_{3n} : $a_0, a_3, a_6, a_9, a_{12}, \dots$

a_{n^2} : $a_0, a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots$

a_{n+8} = tutti i termini con indice ≥ 8 : $a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \ldots$

sottosucc. finita perché definitivamente prende tutti i termini
OTTENUTA MEDIANTE SHIFT degli indici

Cosa lega il limite di una succ. al limite delle sottosucc. ?

<u>Teorema</u> Sia a_n una succ. e sia a_{n_k} una s.succ.

Supponiamo che $a_n \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora $a_{n_k} \longrightarrow \ell$ (stesso ℓ).

ACHTUNG! Se $\lim_{n \to +\infty} a_n$ NON esiste, non si può dire nulla sul limite della sottosucc. (a seconda dei casi può esistere o non esistere).

UTILIZZO OPERATIVO DEL TEOREMA. Sia data una succ. a_n.

Supponiamo che esistano 2 sottosuccessioni

$$a_{n_k} \longrightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$a_{m_k} \longrightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

con $l_1 \neq l_2$.

Allora la succ. a_n NON ha limite (cioè tipo ④)

Se $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora tutte le s. succ. dovrebbero $\to l$ (stesso l)

Esempio 1 Sia $a_n = (-1)^n$ $\quad 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Considero

a_{2n} = s. succ pari $= (-1)^{2n} = 1 \to 1 = \ell_1$

a_{2n+1} = s. succ. dispari $= (-1)^{2n+1} = -1 \to -1 = \ell_2$

$\ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow a_n$ NON HA LIMITE

— o —

Esempio 2 $a_n = \left(2 + (-1)^n\right)^n$ NON ESISTE

$a_{2n} = \left(2 + (-1)^{2n}\right)^{2n} = (2+1)^{2n} = 3^{2n} \to +\infty$

DIVERSI

$a_{2n+1} = \left(2 + (-1)^{2n+1}\right)^{2n+1} = (2-1)^{2n+1} = 1^{2n+1} = 1 \to 1$

Esempio 3 $\qquad a_n = (3+(-1)^n)^n \longrightarrow +\infty$

$$3+(-1)^n \geq 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{(3+(-1)^n)^n}_{\downarrow\ +\infty} \geq \underbrace{2^n}_{\downarrow\ +\infty} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esempio 4 $\qquad a_n = n^2+(-1)^n n \longrightarrow +\infty$

$$\underbrace{n^2+(-1)^n n}_{\downarrow\ +\infty} \geq \underbrace{n^2-n}_{\downarrow\ +\infty} \qquad n(n-1)$$

Esempio 5 $\quad a_n = (-1)^n n^2 + n$ NON ESISTE

$$a_{2n} = (-1)^{2n}(2n)^2 + (2n) = 4n^2 + 2n \longrightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}(2n+1)^2 + (2n+1) = -(2n+1)^2 + (2n+1)$$

$$= -4n^2 - 4n - 1 + 2n + 1 = -4n^2 - 2n \longrightarrow -\infty$$

Esempio 6 $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ visto prima.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{2000}}{2^n} \rightsquigarrow a_n$$

Criterio rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2000}}{2^{\cancel{n}+1}} \cdot \frac{\cancel{2^{n}}}{n^{2000}} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2000}}_{\downarrow \, 1^{2000}} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} = \ell < 1$$

Il limite originario è 0.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}, \ \text{per ogni } b > 1}$$

Gli esponenziali (con base > 1) battono le potenze

Fattoriale vs esponenziale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{20^n}{n!} = 0 \quad \to a_n$$

Rapporto: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{20^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{20^n}$

$$= \frac{20 \cdot \cancel{20^n}}{(n+1)\cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{20^n}} = \frac{20}{n+1} \to 0$$

$l < 1$

$\shortparallel$

0

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}}$$

FATTORIALE batte esponenziale

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 14}}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71827\ldots}$$

BISOGNA DIM. CHE ESISTE

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!}=+\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!} = a_n \to +\infty$$

Rapporto:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}\cdot(n+1)^n}{\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e = \ell > 1$$

Esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n^n}{2^{n^2}}}_{a_n} = 0$$

Radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{n^2}}} \overset{\text{Precorso}}{=} \frac{n}{2^n} \longrightarrow \underset{\underset{l<1}{\parallel}}{0}$$ perché già in tabellina

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\underbrace{n}_{a_n}} \qquad \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \qquad \infty^0 \text{ indeterminata}$$

RAPPORTO → RADICE : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to$ stesso l

Basta calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1 \text{ , quindi anche } \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n^2+27} \qquad a_n = 2n^2+27$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)^2+27}{2n^2+27} = \frac{2n^2+\dots}{2n^2+\dots} \longrightarrow 1$$

quindi anche $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2n^2+27} \longrightarrow 1$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio in } n} = 1}$$

∞^0

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty}$$

$a_n = n!$

$(n!)^{\frac{1}{n}}$

∞^0

RAPPORTO RADICE

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 \to +\infty$$

Esempio $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$a_n = \frac{n!}{n^n}$

RAPPORTO $\longrightarrow$ RADICE

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

(vedi alcune schermate precedenti)

Ma allora $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \longrightarrow \frac{1}{e}$

— o — o —

Esempio 1 $\quad a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \longrightarrow 0$

$$a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$$

$$a_5 = \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{10^2}$$

$$a_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2}$$

$$a_4 \le \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{5}{4^2}$$

Il teo. algebrico della somma vale quando il numero di addendi è FISSO.
In questo caso il numero di addendi cresce di volta in volta.
Quindi il teo. non si applica.

$$0 \leq a_n \leq \overbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}^{n+1}$$

ho sostituito tutti gli addendi con il + grande

numero addendi

$$0 \leq a_n \leq (n+1) \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad \qquad 0 \qquad \qquad 0$$

Esempio 2

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0$$

$$\underset{\downarrow}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \quad \underset{\downarrow}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \quad \underset{\downarrow}{\frac{1}{\sqrt{2n}}}$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

NOOOOO!!!!! In questo caso $a_n \to +\infty$

$$\underset{\downarrow \atop +\infty}{a_n} \geq \underbrace{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}^{n+1}}_{\downarrow \atop +\infty}$$

Sostituisco tutti gli addendi con il + piccolo

$$= \frac{n+1}{\sqrt{2n}} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}} = \underset{\downarrow \atop +\infty}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}}\underset{\downarrow \atop 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$