# MA1 TLC

$\boxed{\text{ORA 10}}$

Titolo nota 10/10/2006

$a_n$ successione

$$a_n \begin{cases} \to l \in \mathbb{R} & 1 \\ \to +\infty & 2 \\ \to -\infty & 3 \\ \text{INDETERMINATA} & 4 \end{cases}$$

<u>Def. 4</u> NdP

<u>Def. 2</u> $\forall M \in \mathbb{R}$, $a_n \geq M$ definitivam.

<u>Def. 3</u> $\forall M \in \mathbb{R}$, $a_n \leq M$ defin.

<u>Def. 1</u> $\forall \varepsilon > 0$ $|a_n - l| \leq \varepsilon$ definit.

<u>Def. 1bis</u> $a_n \to l^+$ $\forall \varepsilon > 0$ $l < a_n \leq l + \varepsilon$ definit.

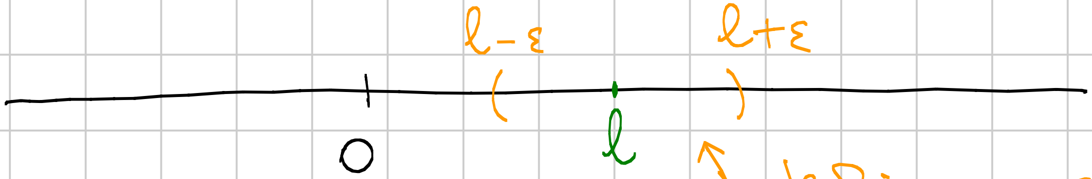
$a_n \to l^-$ $\forall \varepsilon > 0$ $l - \varepsilon \leq a_n < l$ "

# Teo. permanenza del segno

* Se $a_n \to l > 0$, allora definitivamente $a_n > 0$
* Se $a_n \to +\infty$, allora definitivamente $a_n > 0$

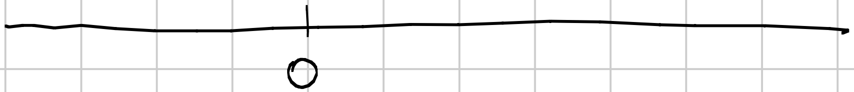
Analoghi: se $a_n \to l < 0$, allora def. $a_n < 0$
se $a_n \to -\infty$, allora def. $a_n < 0$

Dim. Hp. $a_n \to l > 0$ Tesi $a_n > 0$ defin.




defin. $a_n$ sta tra $l-\varepsilon$ e $l+\varepsilon$, quindi sopra 0.

Hp $a_n \to +\infty$ Tesi $a_n > 0$ defin.



Fisso $M = 2006$ Per defin. di 2 defin. $a_n \geq 2006$,
dunque $> 0$

$\boxed{\text{Per esercizio fare enunciati analoghi con } < 0.}$

— o — o —

Estensioni Se $a_n \to \ell > 27$, allora defin. $a_n > 27$

$a_n \to -\infty$, allora defin. $a_n < -85$.

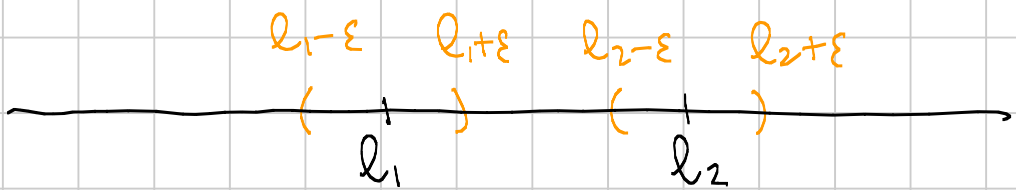
— o — o —

<u>Teo. unicità del limite.</u> Una successione $a_n$ può avere uno ed uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④.
Inoltre, se è di tipo ①, lo è per un solo valore di $\ell$.

[Una successione NON può avere 2 limiti diversi]

"Dim" Dimostriamo che non può essere contemporaneamente

$a_n \to \ell_1$
$a_n \to \ell_2$ con $\ell_1 < \ell_2$




prendo 2 intorni di $\ell_1$ ed $\ell_2$ disgiunti. Definit. $a_n$ dovrebbe stare in entrambi
ASSURDO.

Calcolo dei primi limiti. Dim. che $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Uso def. Devo mostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $n^2 \geq M$ definit.

$n^2 \geq M$

↗ se $M \leq 0$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$

↘ se $M > 0$ è vero $\forall n \geq \sqrt{M}$

in entrambi i casi è vero definit.

Allo stesso modo si dimostra che $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty \quad (\alpha > 0)$

Caso particolare $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} \quad \left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$

Devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $\sqrt{n} \geq M$ definitiv.

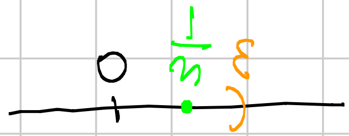
$\sqrt{n} \geq M$

↗ se $M \leq 0$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$

↘ se $M \geq 0$ è vero $\forall n \geq M^2$

cioè definitiv.

Dimostriamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, anzi $0^+$




Devo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < \frac{1}{n} \le \varepsilon$

$0 < \frac{1}{n}$ questa è vera $\forall n \ge 1$

$\frac{1}{n} \le \varepsilon$ questa è vera $\forall n \ge \frac{1}{\varepsilon}$, cioè definitivamente

Allo stesso modo si dimostra che $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\beta} = 0^+$ $(\beta < 0)$

CONCLUSIONE

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}}$$

→ TABELLINA

La successione $n^0$ è la succ. $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \dots$

$$\begin{array}{cccc} 1^0 & 2^0 & 3^0 & 4^0 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

dunque $\to 1$.

## Teorema di confronto (confronto a 2).

Siano $a_n$ e $b_n$ due succ. Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente.}$$

Allora

* se $a_n \to +\infty$, anche $b_n \to +\infty$
* se $b_n \to -\infty$, anche $a_n \to -\infty$
* se $a_n \to l_1 \in \mathbb{R}$ e $b_n \to l_2 \in \mathbb{R}$, allora $l_1 \leq l_2$

$\boxed{\text{ACHTUNG}}$ Sapendo solo che $a_n \to l_1 \in \mathbb{R}$, non possiamo concludere che $b_n \to l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_2 \geq l_1$ (potrebbe essere $b_n \to +\infty$ oppure $b_n$ senza limite (irreg.).)

## Teorema dei Carabinieri (confronto a 3).

Siano $a_n, b_n, c_n$ 3 succ. Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitivamente.}$$

Supponiamo inoltre che $a_n \to l \in \mathbb{R}$, $c_n \to l \in \mathbb{R}$ stesso limite

Allora $b_n \to l \in \mathbb{R}$ (stesso limite delle altre 2).

— o — o —

carabinieri

$$\begin{array}{ccccc} a_n & \leq & b_n & \leq & c_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l & & l & & l \end{array}$$

Esempio 1 $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Dim.

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

Divido per $n$ conservando i versi (si può per $n \geq 1$)

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

vera $\forall n \geq 1$, cioè definitiv.

$-\frac{1}{n} \to 0$ (si dim. come quell'altro)

$\frac{\sin n}{n} \to 0$

$\frac{1}{n} \to 0$ (Dim. prima)

Esempio 2

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan(n! - 2^n + \sin n^2)}{n^3} = 0$$

" $a_n$

Dim. Devo verificare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $-\varepsilon \le a_n \le \varepsilon$ definitiv., il che si riduce ad una semplice diseq.

NO !!!!!!!!

Nuova partenza

$$-\frac{\pi}{2} \le \arctan(\text{mostro}) \le \frac{\pi}{2}$$

Divido per $n^3$

$$-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n^3}\right) \le \frac{\arctan(\text{mostro})}{n^3} \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^3}$$

$\downarrow 0$ $\qquad$ $\xrightarrow{} 0$ $\qquad$ $\downarrow 0$

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 11}}$

Teoremi algebrici
- → somma di 2 succ.
- → prodotto costante · succ.
- → prodotto di 2 succ.
- → quoziente di 2 succ.

Retta reale estesa $\quad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ (è come dire $a_n$ di tipo 1, 2, 3)

Su $\overline{\mathbb{R}}$ posso, entro certi limiti, estendere le operazioni aritmetiche

$$27 + (+\infty) = +\infty$$

$$27 + (-\infty) = -\infty \qquad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$

$$27 \cdot (-\infty) = -\infty$$

Teorema somma $\quad a_n \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}, \quad b_n \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}, \quad c_n = a_n + b_n$

Allora $\quad c_n \to l_1 + l_2$

TRANNE nel caso $\boxed{(+\infty) + (-\infty)}$

Teorema prodotto costante · successione $\quad a_n \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$

succ. · succ. $\quad b_n \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

$c_n = a_n \cdot b_n \qquad c_n \to l_1 \cdot l_2$

TRANNE nel caso $\boxed{0 \cdot \pm\infty}$

$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \qquad c_n = \lambda \cdot a_n$, allora $\quad c_n \to \lambda l_1$

## Teorema quoziente

$a_n \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$

$b_n \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$

$c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$

serve per Hp che sia $b_n \neq 0$ definitivamente

Allora $c_n \to \dfrac{l_1}{l_2}$ TRANNE

* nei casi $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

* nei casi in cui $l_2 = 0$. In questi casi bisogna vedere se è $0^+$ oppure $0^-$.

$\boxed{\text{ACHTUNG, ACHTUNG}}$ Se $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$,

$c_n = a_n + b_n$, si dice che $c_n$ è una forma indeterminata

Cosa vuol dire? NON VUOL DIRE che il limite non esiste (cioè che $c_n$ non ha limite, è di tipo ④)
VUOL dire che il limite di $c_n$ non si può dedurre dal limite di $a_n$ e $b_n$. Occorre vedere come sono fatte $a_n$ e $b_n$.

IDEM per le forme indeterminate $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot (\pm\infty)$.

Esempio 1 $\quad a_n = \underset{\downarrow \atop +\infty}{n^2} - \underset{\downarrow \atop -\infty}{n}$

Forma indeterminata
$+\infty - \infty$

$$n^2 - n = \underset{\downarrow \atop +\infty}{n} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\downarrow \atop +\infty} \longrightarrow +\infty$$

$$+\infty \cdot +\infty = +\infty$$

## Esempio 2

$a_n = n^2 - n^7$ Forma indeterminata

$+\infty - \infty$

$$n^2 - n^7 = n^2 \boxed{(1 - n^5)} \longrightarrow -\infty$$

$n^2 \to +\infty$, $\quad (1-n^5) \to 1 - \infty = -\infty$

$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

## Commento sul teo. quoziente

$a_n \to l_1$, $b_n \to l_2$

$\frac{a_n}{b_n}$

| $l_1$ \ $l_2$ | $-\infty$ | $2$ | $0^+$ | $0^-$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | Boh | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | B |
| $-5$ | $0^+$ | $-\frac{5}{2}$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\frac{5}{3}$ | $0^-$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | B | B | $0$ | $0$ |
| $4$ | $0^-$ | $2$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\frac{4}{3}$ | $0$ |
| $+\infty$ | B | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | B |

Esempio 1 $\lim_{n \to +\infty} n^2 - \cos n = +\infty$

$$\underbrace{n^2 - \cos n}_{+\infty} \geq \underbrace{n^2 - 1}_{+\infty}$$

per confronto a 2

Esempio 2 $\lim_{n \to +\infty} n^3 - n^2 \sin n^3 = +\infty$

$$\underbrace{n^3 - n^2 \sin n^3}_{+\infty} \geq \underbrace{n^3 - n^2}_{+\infty} = \underbrace{n^2}_{+\infty} \cdot \underbrace{(n-1)}_{+\infty}$$

confr. a 2.

$$n^3 - n^2 \sin n^3 = n^3\left(1 - \frac{\sin n^3}{n}\right) \longrightarrow +\infty$$

$$+\infty \cdot (1 - 0) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$-1 \leq \sin(\text{mostro}) \leq 1$$

Divido per $n$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(\text{mostro})}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

Carabinieri

Esempio 3

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 5}{n^3 - 27} = 1$$

Raccolgo $n^3$ sopra e sotto

$$\frac{\cancel{n^3}\left(1 + \underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{5}{n^3}}_{\to 0}\right)}{\cancel{n^3}\left(1 - \underbrace{\frac{27}{n^3}}_{\to 0}\right)} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1$$

## Esempio 4

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2}{5n+1}-\frac{n^3+2}{n^2+3}\right)$$

$$(+\infty)-(+\infty)$$

Forma indeterminata

Facciamo denominatore

$$\frac{(n^2+2)(n^2+3)-(n^3+2)(5n+1)}{(n^2+3)(5n+1)} =$$

$$=\frac{\cancel{n^4}+3n^2+2n^2+6-5\cancel{n^4}-\cancel{n^3}-10n-2}{5n^3+n^2+15n+3} =$$

$$-\infty \leftarrow \;=\frac{-4n^4-n^3+5n^2-10n+4}{5n^3+n^2+15n+3}$$

raccolgo $n^4$ sopra

" $n^3$ sotto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2}{5n+1}-\frac{n^3+2}{n^2+3}\right)$$

$$\sim \frac{n^{\cancel{2}}}{5\cancel{n}}-\frac{n^3}{n^2}$$

$$=\frac{n}{5}-n=-\frac{4}{5}n\to-\infty$$