MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 8}}$

Titolo nota 07/10/2006

Funzioni monotòne Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è

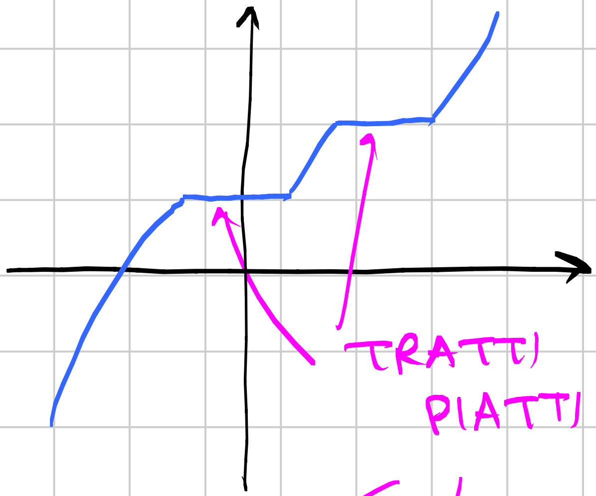
- DEBOLMENTE CRESCENTE se
$$x < y \implies f(x) \leq f(y)$$
- STRETT. CRESCENTE se
$$x < y \implies f(x) < f(y)$$
- DEBOL. DECR. $\quad x < y \implies f(x) \geq f(y)$
- STRETT. DECR. $\quad x < y \implies f(x) > f(y)$

N.B. Mai usare (de)cresc. senza aggettivo (deb. / strett.)

<u>Oss.</u> Se f è strett. cresc. $\Rightarrow$ f è anche deb. cresc.

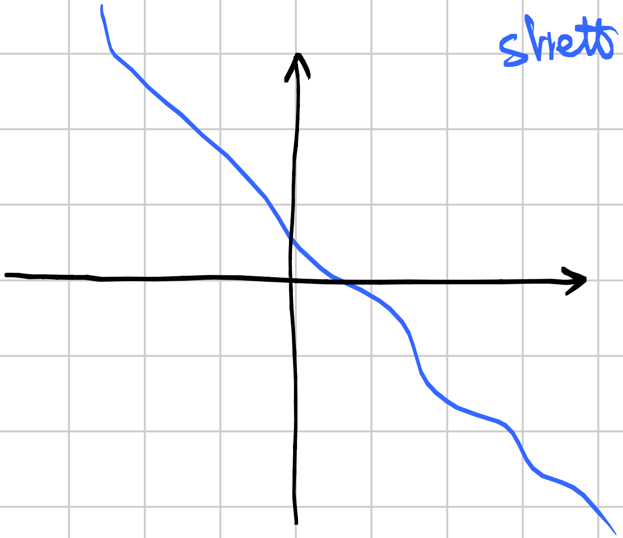
" decres. $\Rightarrow$ " " decr.

strett. cresc.

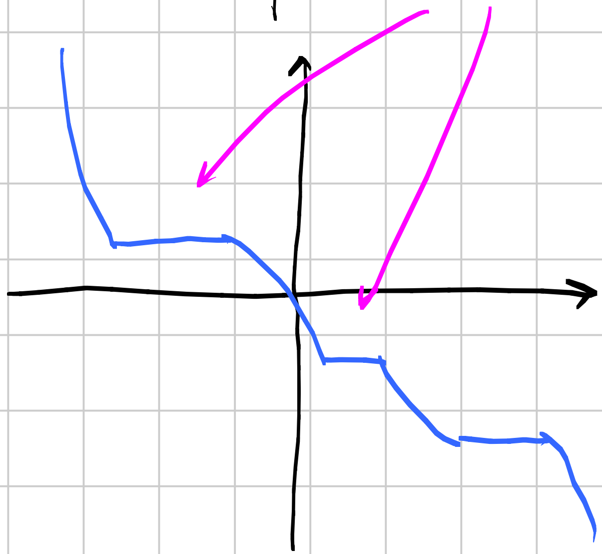


deb. cresc. ma non strett. cresc.

TRATTI PIATTI



strett. decr.



deb. ma non str. decr.

GRANDI TENTAZIONI

① $2^{x+3} = 2^{2x+1} \Rightarrow x+3 = 2x+1$ .... SI

② $\log_5 (x+3) = \log_5 (2x+) \Rightarrow x+3 = 2x+1$ .... NI

③ $\sin (x+3) = \sin (2x+1) \Rightarrow x+3 = 2x+1$ .... NO

G.T. $\cancel{f}(A) = \cancel{f}(B) \Rightarrow A = B$

④ $(x+3)^2 = (2x+1)^2 \Rightarrow x+3 = 2x+1$ NO

Si può fare tranquillamente se f è INIETTIVA.
Chiaramente A e B devono $\in$ insieme di partenza di f

① SI perchè $f(x) = 2^x$ è INIETTIVA e def. su tutto $\mathbb{R}$

② SI pur di porre $A>0, B>0$ (ins. di partenza di log)

③ e ④ no perchè $\sin x$ e x^2 no INIETTIVE

—— o —— o ——

$$2^{x+1} > 2^{2x+3} \Rightarrow x+1 > 2x+3$$ SI

$$\log_3(x+1) > \log_3(2x+3) \Rightarrow x+1 > 2x+3$$ NI

$$\sin(\quad) > \sin(\quad) \Rightarrow$$ NO

G.T. $$\cancel{f}(A) > \cancel{f}(B) \Rightarrow A > B$$

Si può fare se f è STRETT. CRESC.

Supponiamo $f(A) > f(B) \Rightarrow$

- $\boxed{A > B}$ ← UNICO POSS.
- $A = B$ → NO, sarebbe $f(A) = f(B)$
- $A < B$ → NO, perchè essendo f strett. cresc. sarebbe $f(A) < f(B)$

Se f è strett. decr. posso "eliminare f" pur di INVERTIRE I VERSI della disug.

$$f(A) > f(B) \Rightarrow A < B$$

3 G.T. Eliminare una funzione con la sua inversa.

Se g è l'inversa di f, allora $\cancel{g}(\cancel{f}(x)) = x$

$\arcsin(\sin x) = x$
$\arccos(\cos x) = x$
$\sin(\arcsin x) = x$

NO (NI)

$f : A \to B$ e l'inversa $g : B \to A$

$\boxed{g(f(a)) = a \quad \forall a \in A}$

SI

$\boxed{f(g(b)) = b \quad \forall b \in B}$

SI

$\arcsin(\sin x) = x$ $\forall x \in$ insieme di partenza della restrizione di sin usata per definire $\arcsin x$

$\arcsin(\sin x) = x \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad$ $x=0$ SI $\quad$ $x=1$ SI $\quad$ $x=2$ NO

$\sin(\arcsin x) = x \qquad \forall x \in [-1, 1]$ $\quad$ insieme di arrivo della restrizione di $\sin x$ ("B")

$\arccos(\cos x) = x \qquad \forall x \in [0, \pi]$ $\leftarrow$ $x=1$, $x=2$, $x=3$ SI $\quad$ $x=4$, $x=-1$ NO

$\cos(\arccos x) = x \qquad \forall x \in [-1, 1]$

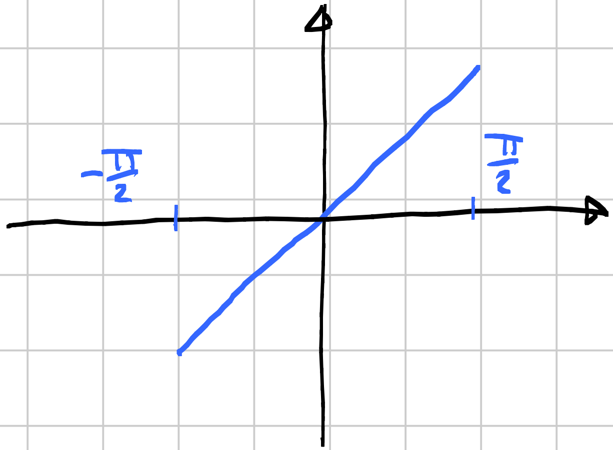
idem con tan e arctan x

— — o —

Considero $\quad f(x) = \arcsin(\sin x) \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Qual è il grafico?

Per $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad f(x) = x$



f ha delle simmetrie?

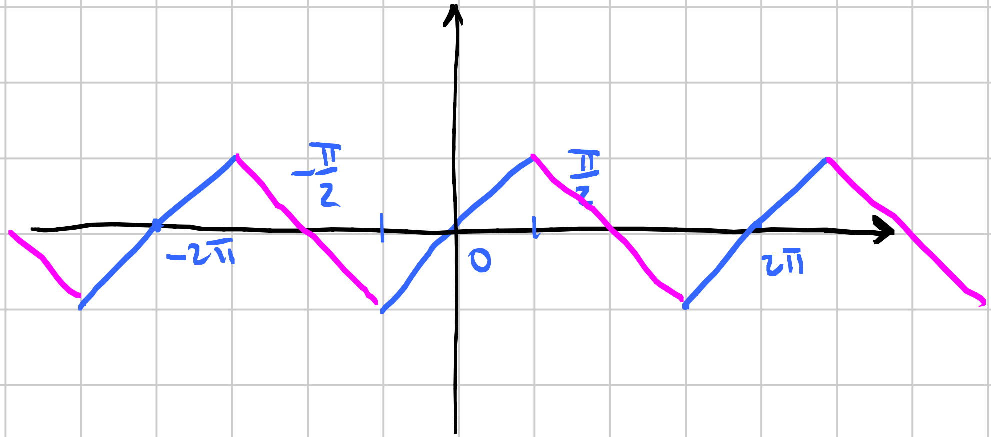
f è DISPARI

f è PERIODICA di periodo 2π

$$
\begin{aligned}
f(x+2\pi) &= \arcsin(\sin(x+2\pi)) \\
&= \arcsin(\sin x) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

poiché sin è periodica

Per esercizio.
Nei tratti rimanenti:



	PARI	DISP	PER
$f(x) = \arctan(\sin x)$			
$= \sin x^2$			
$= \sin^2 x$	SI	NO	SI
$= \sin^3 x$	NO	SI	SI
$= \sin x^3$	NO	SI	NO
$= \cos x^3$	SI	NO	NO
$= 2^{\sin x}$	NO	NO	SI
$= \cos(2^x)$			

$f(x) = \sin x^3$ Pari? $\boxed{\text{Dispari?}}$

$$f(-x) = \sin(-x)^3 \underset{\substack{\uparrow \\ x^3 \text{ dispari}}}{=} \sin(-x^3) \underset{\substack{\uparrow \\ \sin \text{ DISPARI}}}{=} -\sin x^3 = -f(x)$$

$f(x) = \cos x^3$ PARI

$$f(-x) = \cos(-x)^3 = \cos(-x^3) \underset{\substack{\uparrow \\ \cos \text{ PARI}}}{=} \cos x^3 = f(x)$$

$f(x) = \sin(\cos x)$

cos PARI

$$f(-x) = \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x) = f(x)$$ PARI!

$f(x) = 2^{\sin x}$ Periodica ?

sin periodico

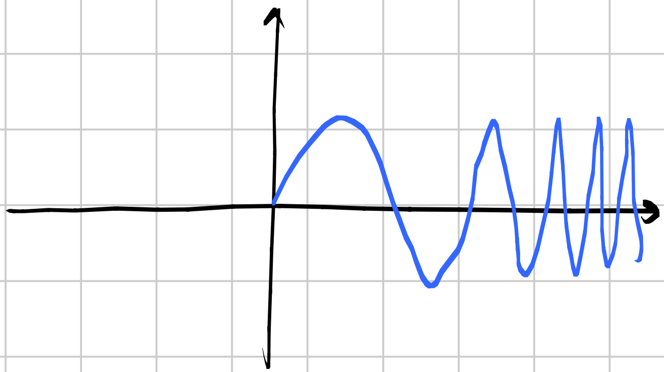
Provo con 2π $f(x+2\pi) = 2^{\sin(x+2\pi)} = 2^{\sin x} = f(x)$

$\Rightarrow$ f è PERIODICA

Oss. Se in una composizione la f interna è periodica, allora la composizione è periodica

$f(x) = \sin x^2$ NON è periodica

I p.ti in cui si annulla f sono sempre + ravvicinati invece di essere equispaziati



MAT 1 TLC

ORA 9

Successioni Limiti

Una <u>successione</u> burocraticamente è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Di solito invece di scrivere $a(0), a(1), a(2), \dots, a(n)$ si scrive

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Diciamo che una certa proprietà vale DEFINITIVAMENTE se vale da un certo p.to in poi, cioè se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che la proprietà vale $\forall\, n \geq n_0$.

Def. elastica di successione: non si chiede che a_n sia definita $\forall n \in \mathbb{N}$, ma solo definitivamente.

Esempi

$a_n = 3n + 4$ SI BURO

$b_n = \dfrac{5n^2+6}{n+1}$ SI BURO

$c_n = \dfrac{1}{n-5}$ NO BURO (male per $n=5$)

SI ELAS. (ok per $n \geq 6$)

$d_n = \sqrt{n - 2006}$

NO BURO

SI ELAST.

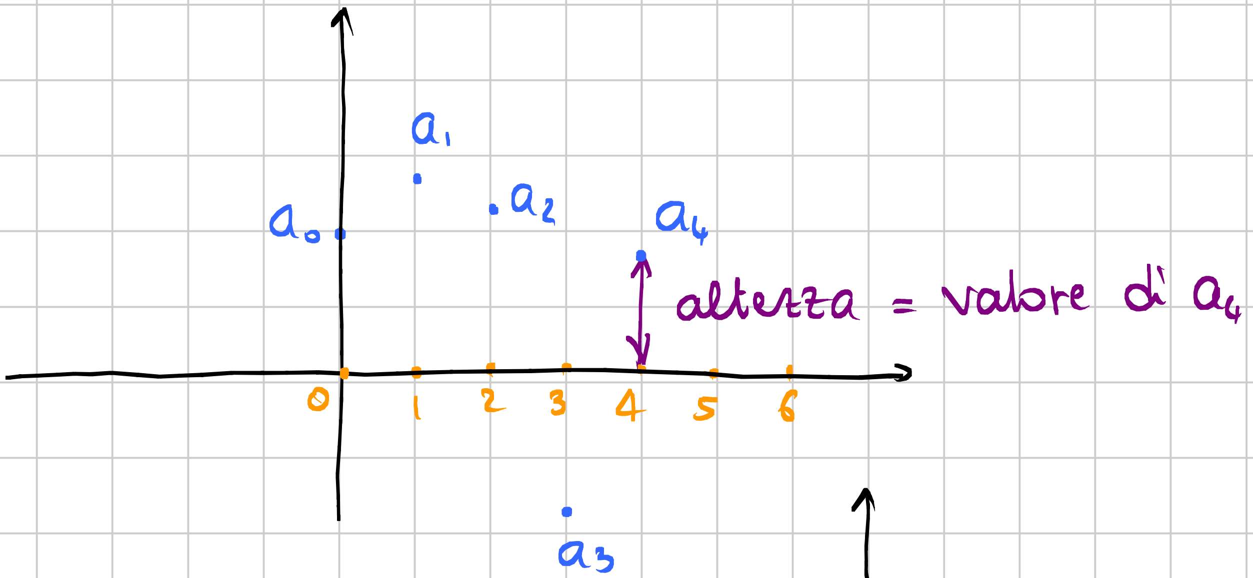
$e_n = \sqrt{2006-n}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{NO} & \text{BURO} \\ \text{NO} & \text{ELAST.} \end{array}}$$

NON È UNA SUCCESSIONE

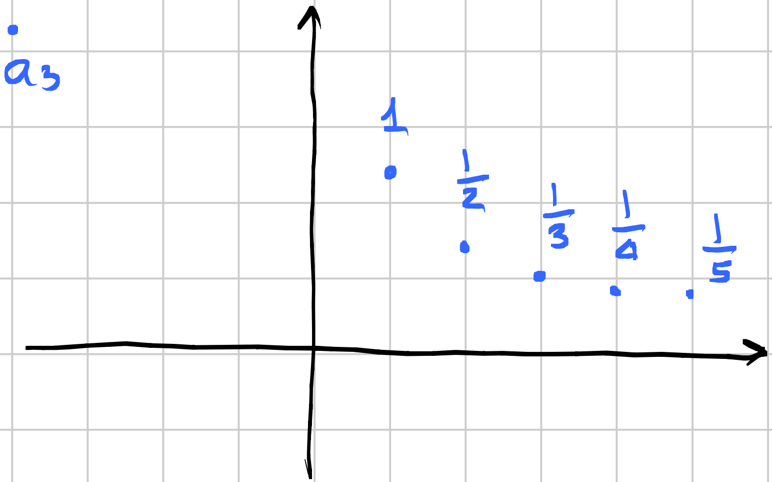
Come rappresentare una successione?

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ In modo cartesiano



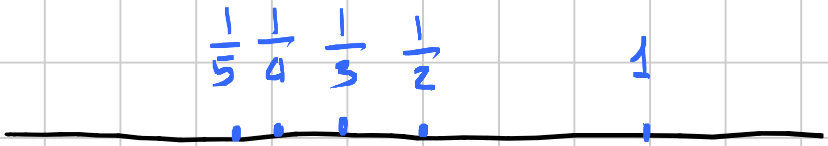
Es. Rappr. di $\frac{1}{n}$

(Defin. per $n \geq 1$)



2° MODO Punti su una retta $\rightsquigarrow$ LAMPADINE

Es. con $\frac{1}{n}$



Lampadine: pensare che sulla retta ad ogni secondo si accende una lampadina.
Al secondo k si accende una lampadina nel p.to di ascissa a_k (e sta accesa 1 sec.)

LIMITE Una successione può avere 4 tipi di comportamento

1. $a_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$

2. $a_n \longrightarrow +\infty$ $\qquad$ " $= +\infty$

3. $a_n \longrightarrow -\infty$ $\qquad$ " $= -\infty$

4. a_n INDETERMINATA $\qquad \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ NON ESISTE

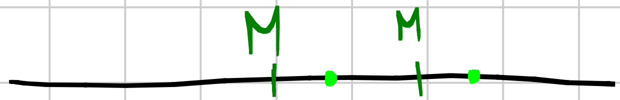
$\boxed{\text{ACHTUNG}}$ Per le successioni $n \to +\infty$ e a nient'altro

Def RIGOROSE

Def. ④ Nessuna delle precedenti

Def. ② $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$a_n \geq M$ definitivamente



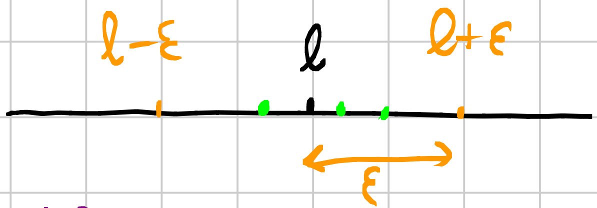
Def. ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. neg.)

$a_n \leq M$ definitivamente

Def. ① $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

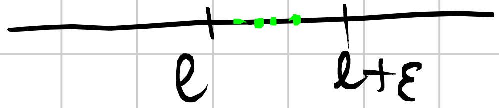
$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$ definitiv.

$|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ ← dist. tra a_n ed ℓ



Estensione di ①

$a_n \longrightarrow l^+$ $\forall \varepsilon > 0$ $l \boxed{<} a_n \le l+\varepsilon$ defin.



$a_n \longrightarrow l^-$ $\forall \varepsilon > 0$ $l-\varepsilon \le a_n \boxed{<} l$

importante che siano strette

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 = 0^+$$

Oss. Se $a_n \to 0$, è obbligata a tendere a 0^+ o 0^-? NO

Se $a_n \to 0^+$, è obbligata ad essere defin. dec.? NO