MAT 1 TLC

ORA 6

Titolo nota 05/10/2006

Max, min, sup, inf.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme

Def. Dico che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A, e scrivo

$$M = \max A$$

se

① $M \in A$;

② $M \geq a \quad \forall a \in A$.

Commenti

① M non è obbligato ad esistere

② Se esiste, è unico

Esempi

1. $A = [0,1]$ $\quad M = 1$ $\quad m = 0$

2. $A = (0,1)$ $\quad M$ non esiste "vorrebbe essere 1, ma $1 \notin A$"

   m non esiste

3. $A = [0,+\infty) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad M$ non esiste

   $m = 0$.

Def. Dico che $m = \min A$ se

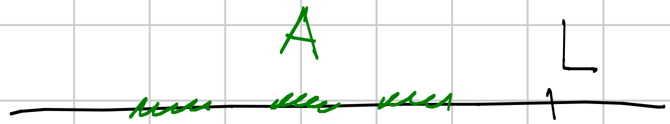
① $m \in A$

② $m \leq a \quad \forall a \in A$

Stessi commenti di sopra

Def. A si dice *limitato superiormente* se esiste $L \in \mathbb{R}$ (anche non appartenente ad A) tale che

$$L \geq a \qquad \forall a \in A$$



A tutto a sx di L

Ogni L che va bene in questa def. si dice MAGGIORANTE di A.

A si dice *limitato inferiormente* se esiste $K \in \mathbb{R}$ t.c.

$$K \leq a \qquad \forall a \in A.$$

Tutti i K che vanno bene si dicono MINORANTI di A.

A si dice *limitato* se A è limitato sia superiormente sia inferiormente.

COMMENTI

① I maggioranti non sono obbligati ad esistere.

<u>Esempio</u> $A = [0, +\infty)$

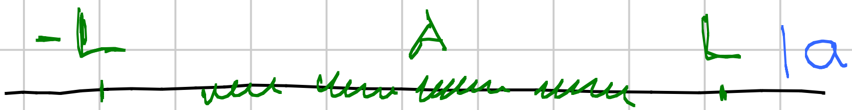
② Se esiste un maggiorante, di sicuro non è unico

<u>Esempio</u> $A = (0, 5)$ $\quad L = 7$ è un magg.
$L = 8$ è pure un magg

Tutti i numeri $L \geq 5$ sono maggioranti

③ Idem per i minoranti

④ A è limitato $\Longleftrightarrow$ esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che



$|a| \leq L \quad \forall a \in A$

ESTREMO INFERIORE ESTREMO SUPERIORE

Def. (1) Dico che $\sup A = +\infty$ se A NON è limitato superiormente, cioè non esistono maggioranti

(2) Dico che $\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferiormente, cioè non esistono minoranti

(3) Dico che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se esistono dei maggioranti, ed L è il + piccolo di loro (L è il minimo dei maggioranti)

(4) Dico che $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se l è il massimo dei minoranti.

Teorema Se A è limitato superiormente (dunque esistono dei maggioranti) allora il minimo dei maggioranti esiste per forza.

Dim. Prendiamo l'insieme A.
Indichiamo con B l'insieme dei maggioranti di A.
Per def. di maggiorante, A sta tutto a sx di B

Per l'assioma di CONTINUITÀ
esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ t.c.

① $a \leq c \quad \forall a \in A$ $\longleftrightarrow$ c è un maggiorante di A

② $c \leq b \quad \forall b \in B$ $\longleftrightarrow$ c è più piccolo di tutti gli altri maggioranti

Quindi c è il minimo dei maggioranti.

CONSEGUENZA Inf e sup sono OBBLIGATI AD ESISTERE, finiti o infiniti

Commenti

① Inf e sup esistono sempre e sono UNICI

② Se esiste $M = \max A$, allora $M = \sup A$
Se esiste il max, questo è anche sup.
[Se esiste min, questo è anche inf].

③ Se $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\sup A \in A$, allora è anche il $\max A$.
Idem per min e inf.

④ Se $\sup A = +\infty$, allora di SICURO $\max A$ non esiste

Esempi

A	inf	sup	min	max
$[0,1]$	0	1	0	1
$(0,1]$	0	1	N.E.	1
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$	0	N.E.
$(0,1) \cup (2,4]$	0	4	N.E.	4
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$	N.E.	N.E.

OCCHIO: il massimo è (QUANDO ESISTE) un maggiorante, anzi è il min. dei maggioranti, cioè il sup.

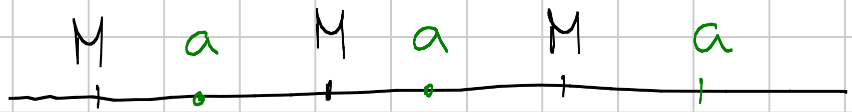
CARATTERIZZAZIONE DEL SUP

(altro modo di dare la definizione)

① $\sup A = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

esiste $a \in A$ t.c. $a \geq M$



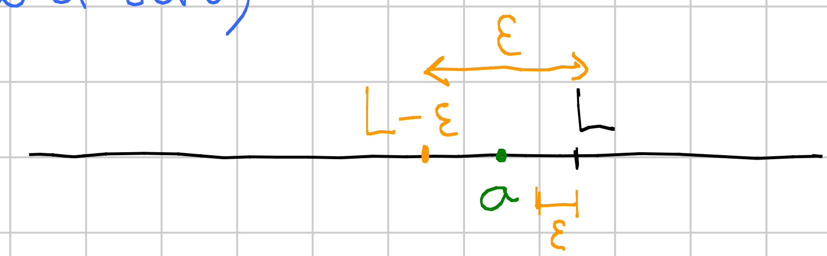
② $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (L è un maggiorante)

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

esiste $a \in A$ t.c.

$a \geq L - \varepsilon$

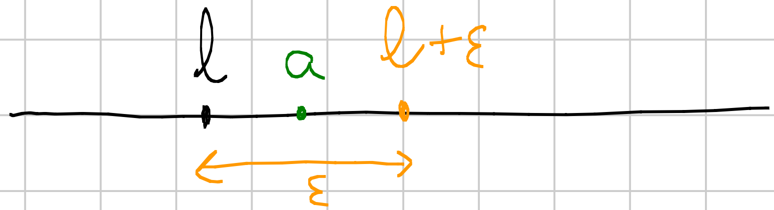


(3) $\operatorname{Inf} A = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. neg.)

esiste $a \in A$ t.c. $a \leq M$

(4) $\operatorname{Inf} A = \ell \in \mathbb{R}$ se



(i) $\ell \leq a \quad \forall a \in A$ (ℓ è minorante)

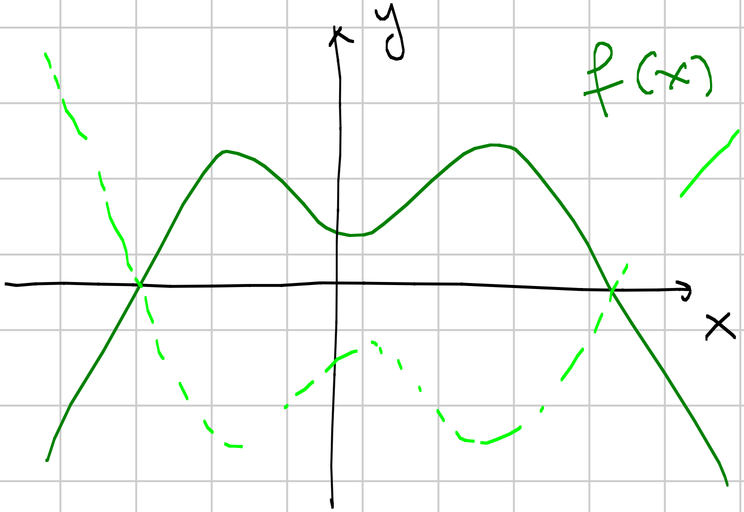
(ii) $\forall \varepsilon > 0$

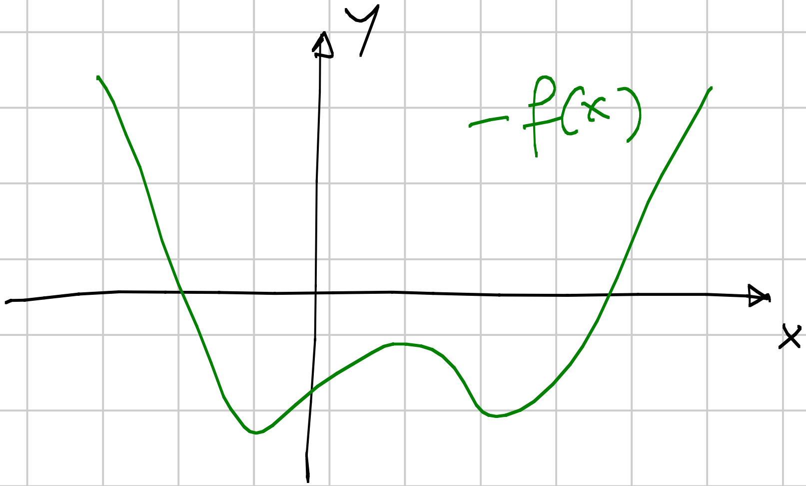
esiste $a \in A$ t.c. $a \leq \ell + \varepsilon$.

MAT 1 TLC

ORA 7

OPERAZIONI SUI GRAFICI

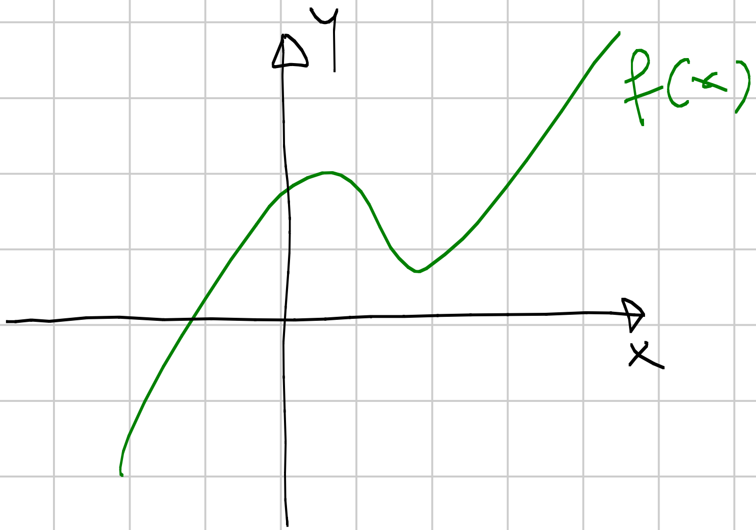


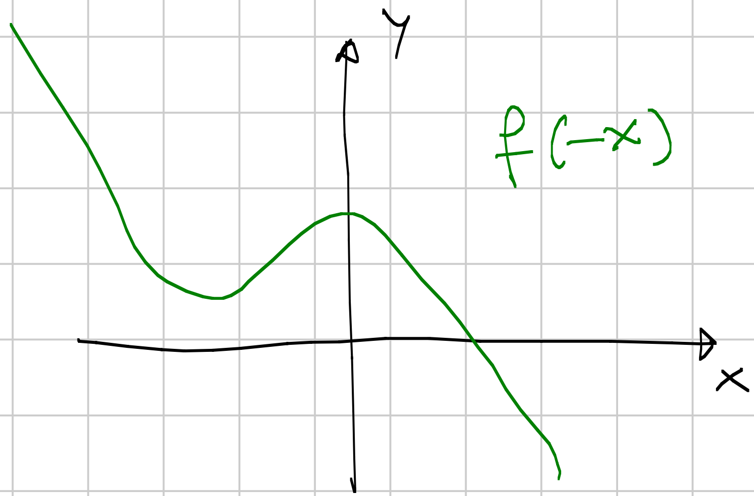


$f(x) \rightsquigarrow -f(x)$

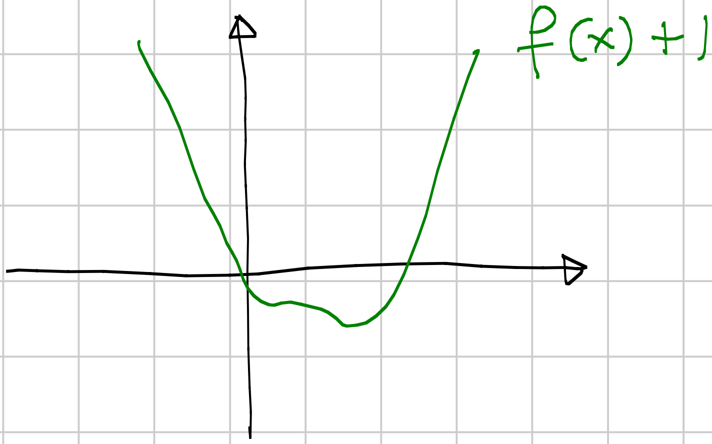
SIMMETRIA RISPETTO ASSE X

$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$





SIMMETRIA RISPETTO ASSE y

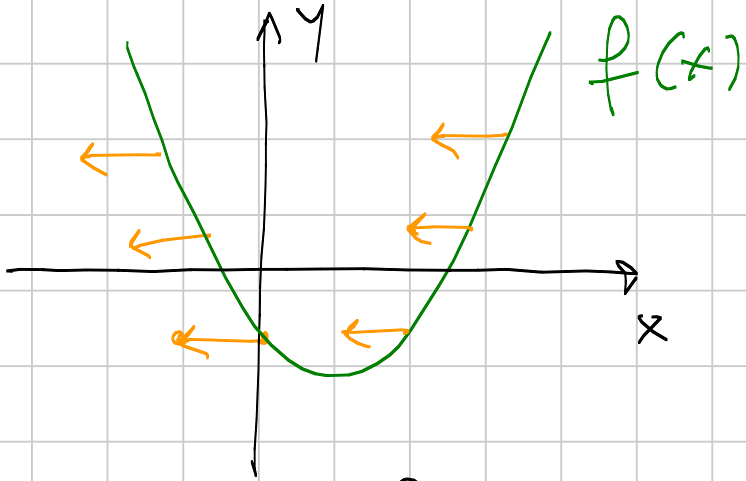


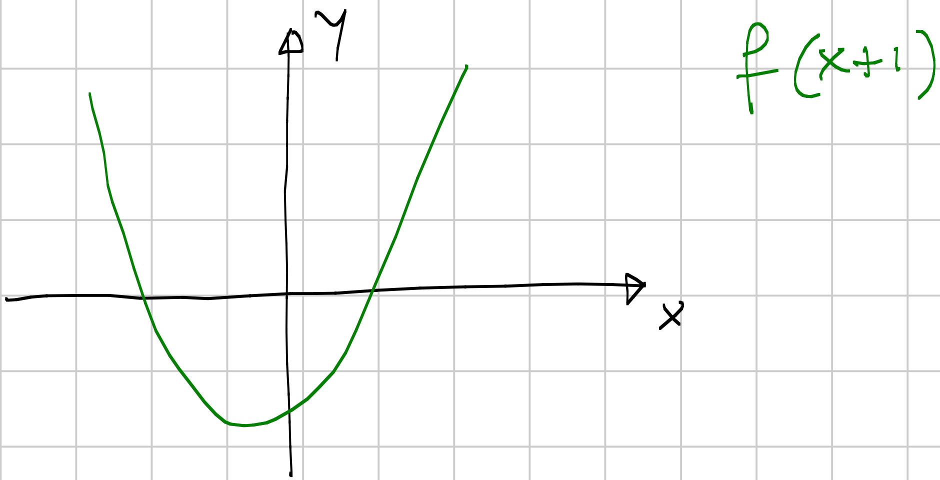
$f(x) \rightsquigarrow f(x)+a$

TRASLAZIONE IN VERTICALE

↗ in alto se $a>0$

↘ in basso se $a<0$



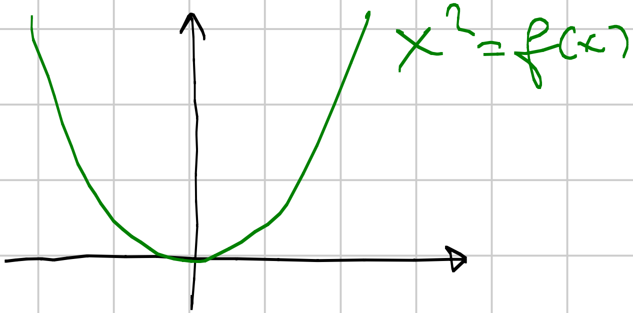


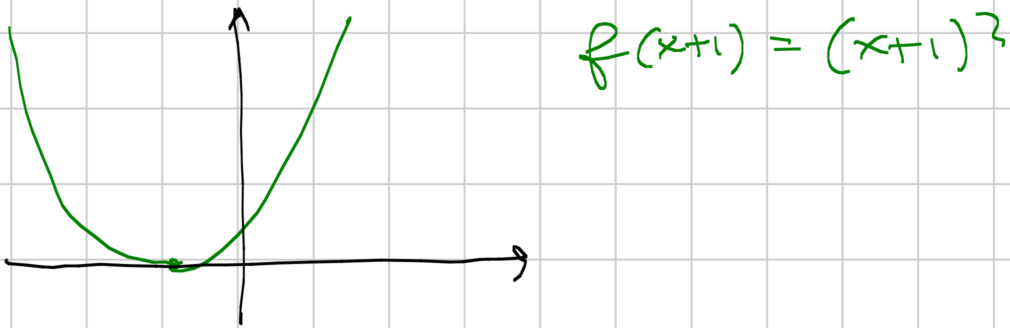
$$f(x) \rightsquigarrow f(x+a)$$

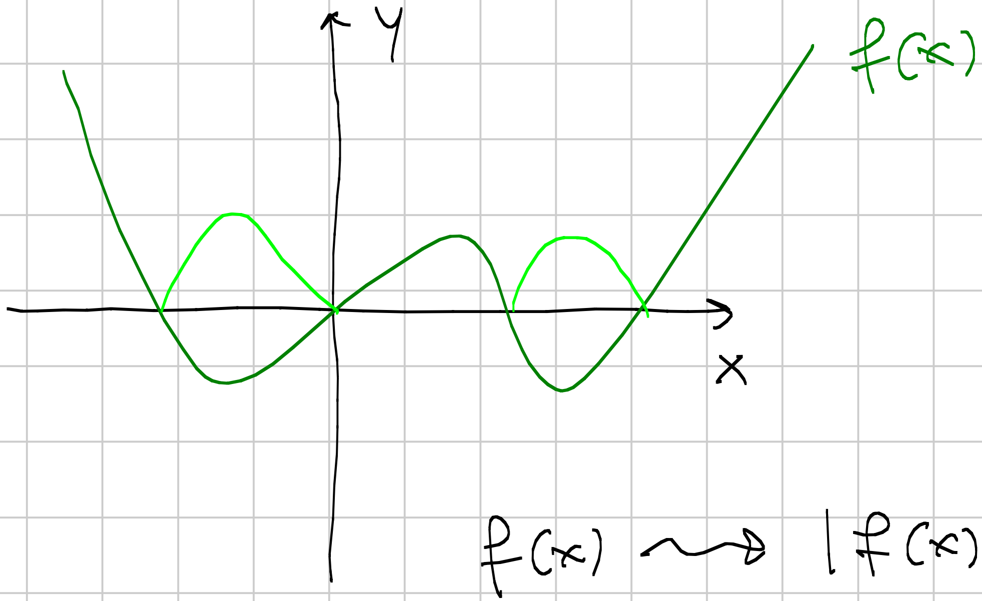
TRASLAZIONE IN ORIZZONTAE

verso sx se $a>0$

verso dx se $a<0$







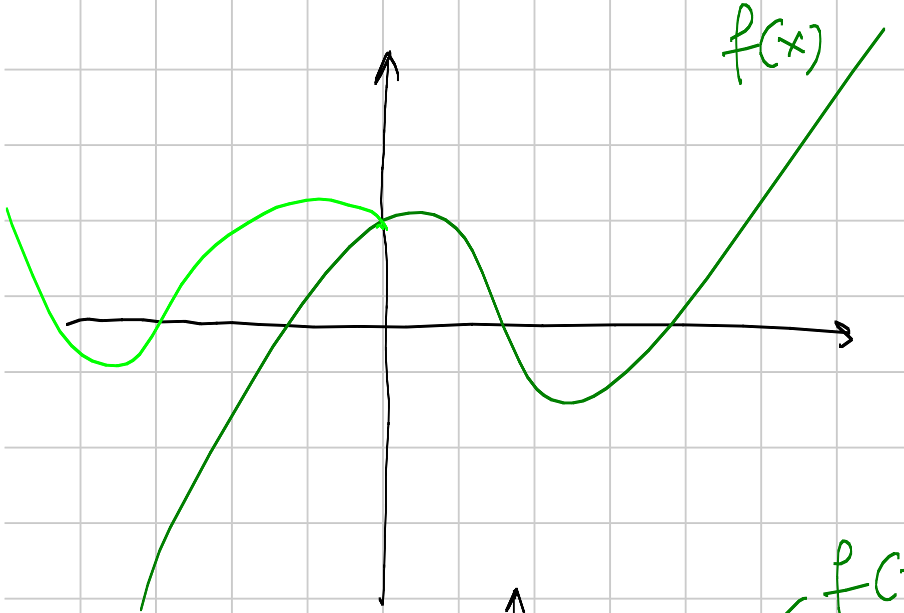
$f(x) \rightsquigarrow |f(x)|$

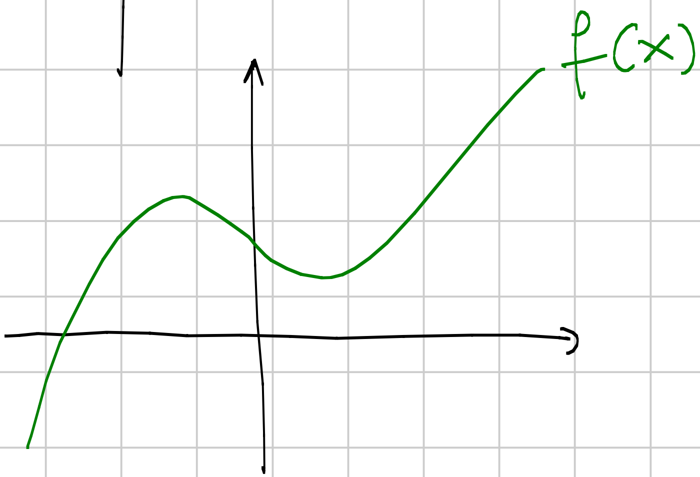
Le parti negative (nel semipiano $y \leq 0$) vengono riflesse in alto

$f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$

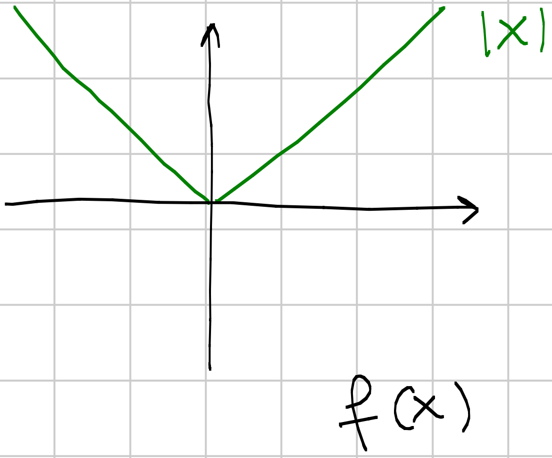
$f(|x|)$ è una funzione che $\boxed{\text{coincide con } f(x) \text{ per } x \geq 0}$ ed inoltre è una funzione $\boxed{\text{PARI}}$

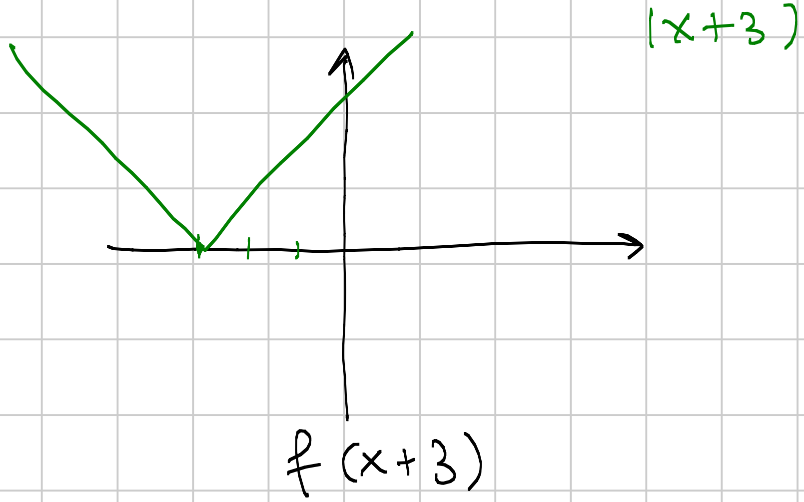
$$f(|x|) = f(|-x|)$$



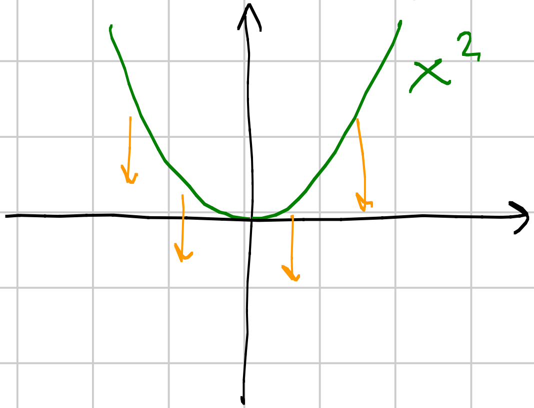


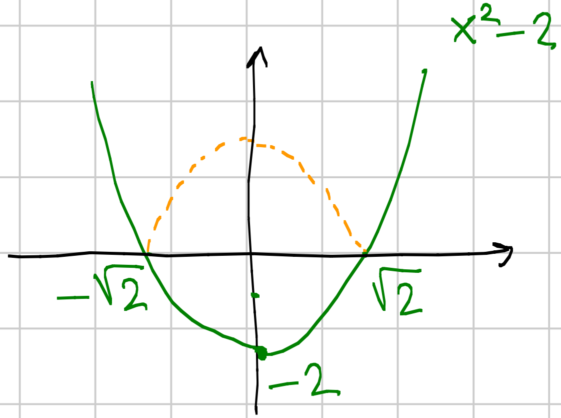
Esempio 1 Grafico di $|x+3|$

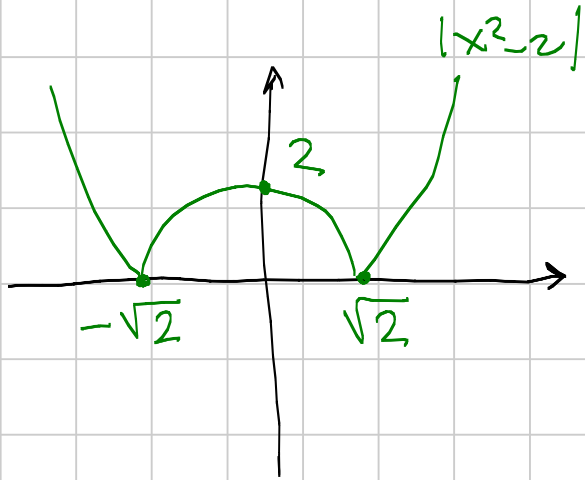




Esempio 2 $|x^2-2|$

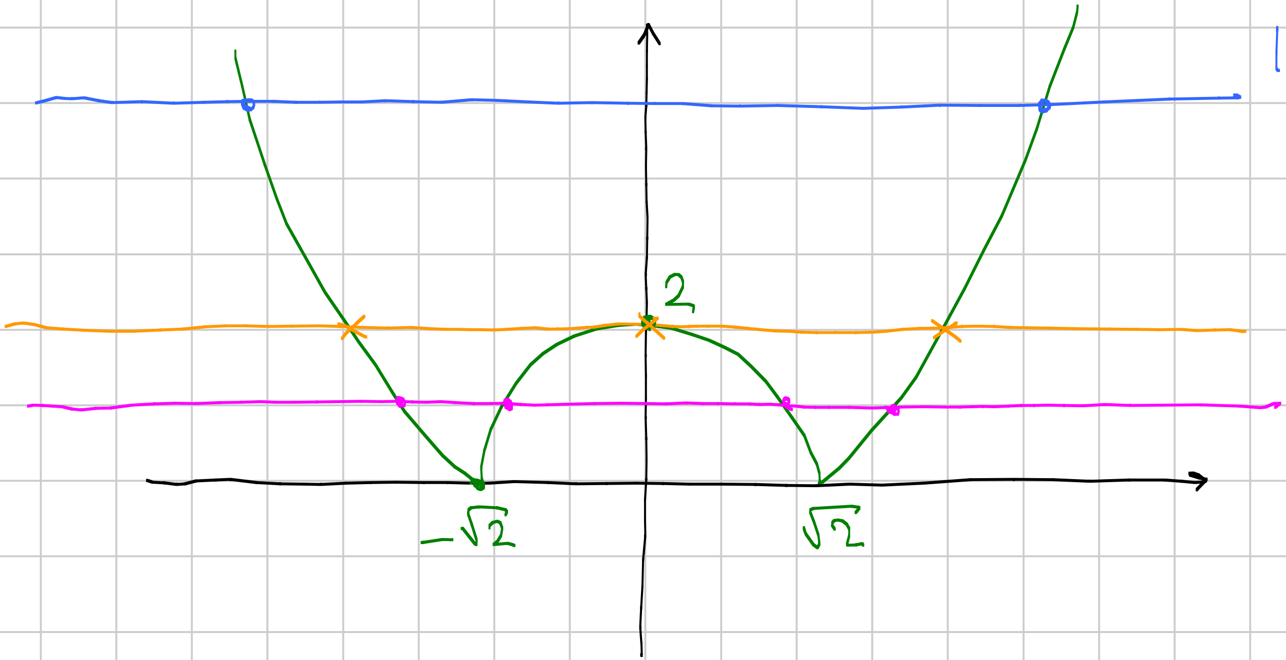






Esempio 3 Quante soluzioni ha l'equazione

$|x^2-2| = 1$; $|x^2-2| = 2$; $|x^2-2| = 57$



$|x^2-2| = 57$ ha 2 soluzioni

$|x^2-2| = 2$ ha 3 sol.

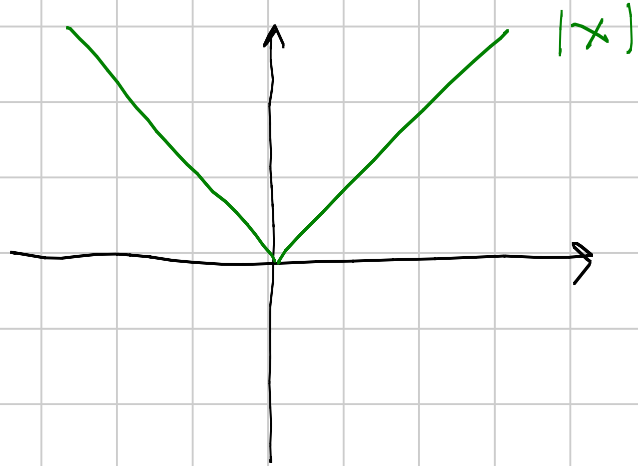
$|x^2-2| = 1$ ha 4 soluzioni

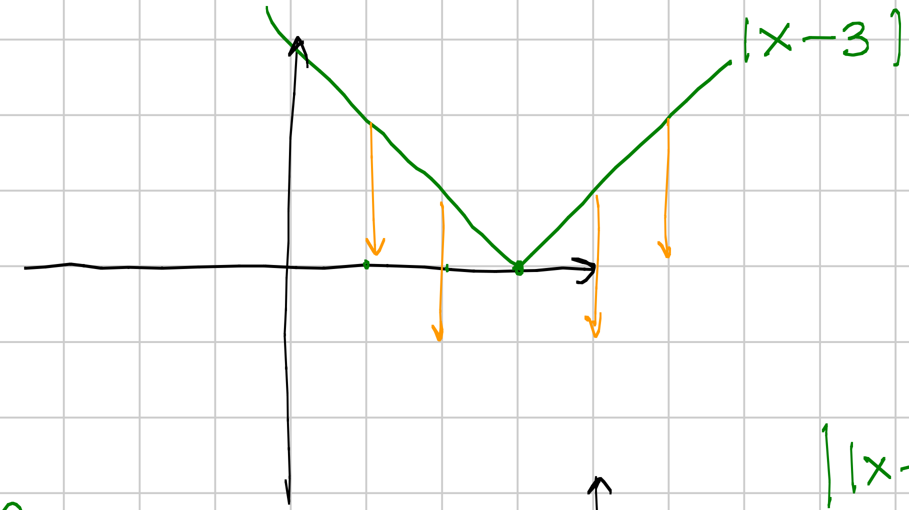
Esempio

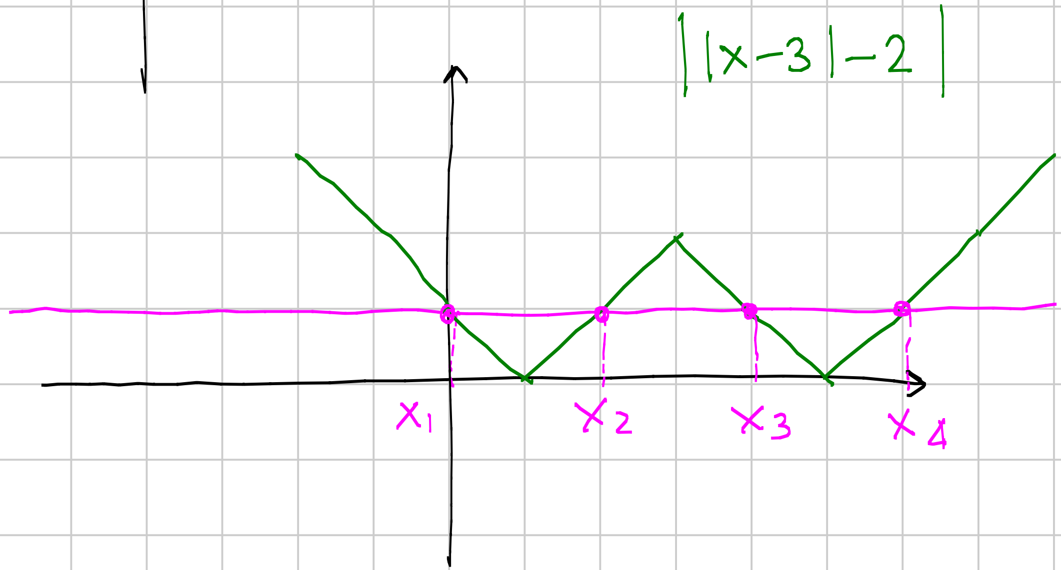
$$\big|\,|x-3|-2\,\big| = 1$$

L'eq. ha 4 soluzioni:

$x = 0, 2, 4, 6$

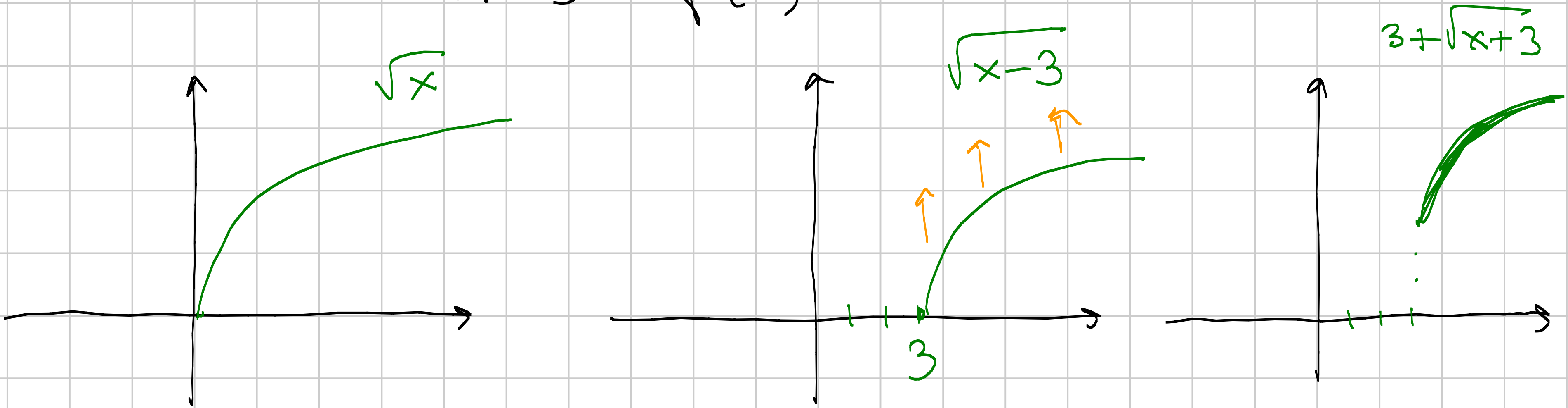






Esempio

$$3 + \sqrt{x-3} = f(x)$$



$$f(x) = 3 + \sqrt{x-3}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON HA SENSO

$f : [3, +\infty) \to \mathbb{R}$ NO SURG.

SI INIETTIVA

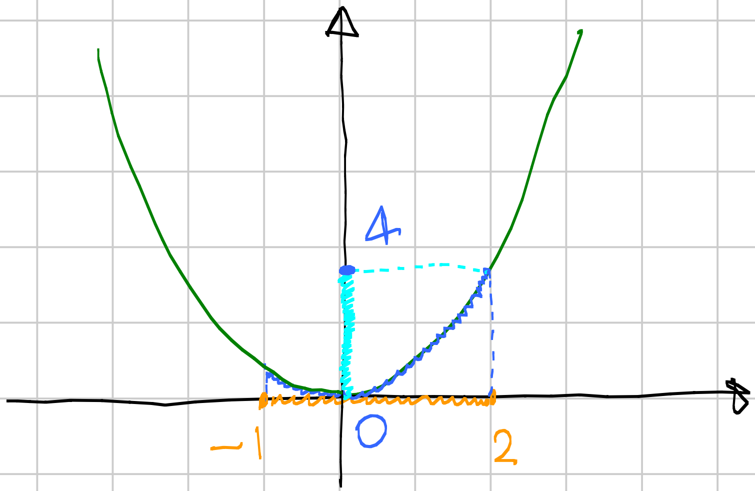
$f : [3, +\infty) \to [3, +\infty)$ invertibile

Immagine e controimmagine di insiemi

$f(x) = x^2$

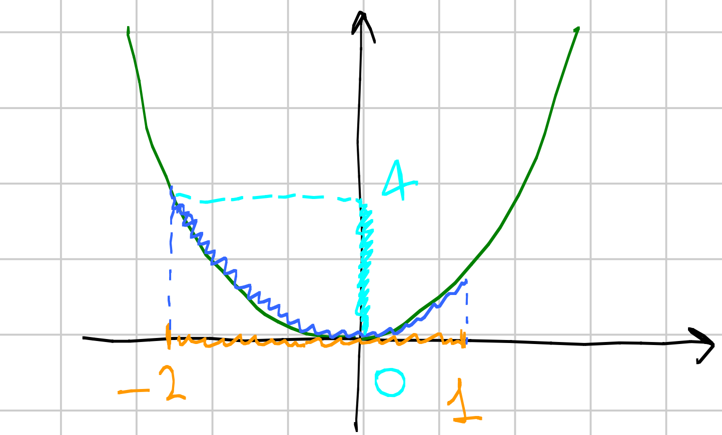
$f([1,2])$ = insieme dei valori assunti da $f(x)$ quando x varia fra 1 e 2
$= [1,4]$

$f([-1,2]) = \to \cancel{[1,4]}$
$\searrow [0,4]$



$f(x) = x^2$

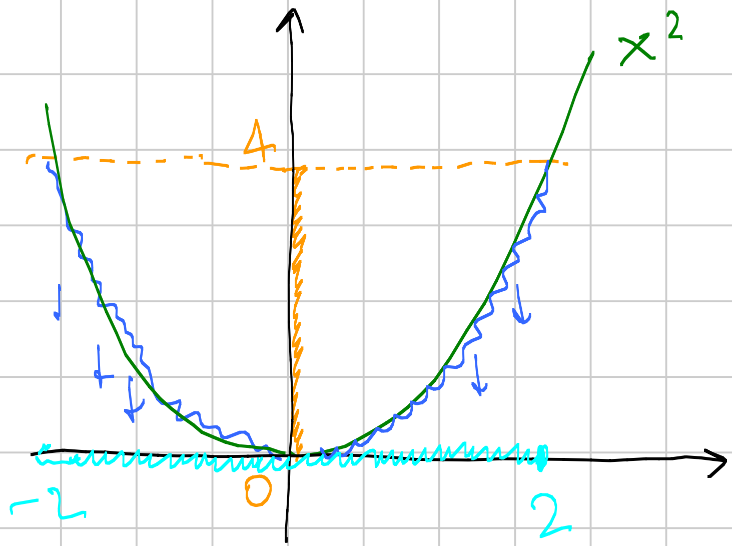
$f([-2, 1]) = [0, 4]$



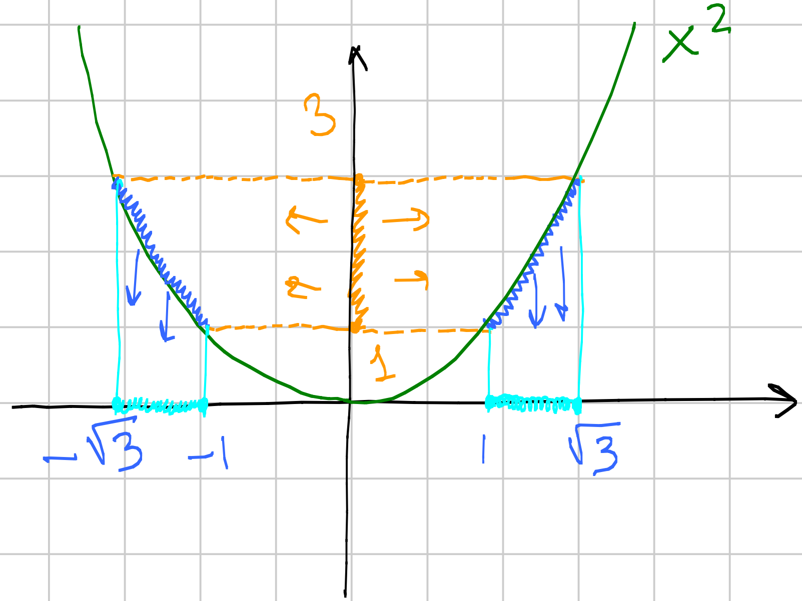
<u>Controimmagine</u>.

$f^{-1}([0,4])$ = valori della x per cui $f(x)$ cade fra 0 e 4

$= [-2, 2]$



$f^{-1}([1,3])$ = val. di x per cui $f(x) \in [1,3]$



$= [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

$f^{-1}((-9, 9])$

$= [-3, 3]$