MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 4}}$

Titolo nota 04/10/2006

1) Principio di induzione
2) Presentazione funzioni elementari

— o — o —

INDUZIONE

Serve per dimostrare proprietà dei numeri naturali ($\mathbb{N}$)

P_n = proprietà dei naturali

espressione che contiene al suo interno un parametro n naturale e che, a seconda del valore di n può essere vera o falsa

P_n può essere

$$n^2 \geq n + 27$$

$$n + 7 \geq n$$

$$n + 7 \leq n$$

Supponiamo di voler dimostrare che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

Induzione

Supponiamo che

(i) P_0 è vera (cioè sostituendo $n=0$ viene vera) PASSO BASE

(ii) P_n vera $\Rightarrow$ P_{n+1} è vera (se è vera per un certo n, è vera anche per il successivo)

PASSO INDUTTIVO

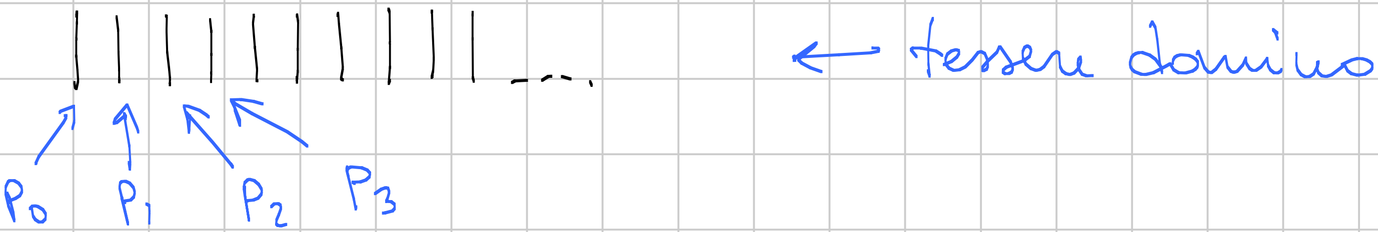
Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Perché funziona? So che P_0 è vera. Applico il pass. ind. con $n=0$. Se P_0 è vera, allora P_1 è vera. So già P_0 vera e quindi anche P_1 è vera.

Applico (ii) con $n=1$. P_1 vera $\Rightarrow$ P_2 vera.

" " $n=2$ P_2 vera $\Rightarrow$ P_3 vera

In questo modo prima o poi arrivo a dim. che sono tutte vere.



(i) Passo base $\Rightarrow$ La tessera P_0 cade

(ii) Meccanismo caduta: se cade una tessera, cade succ.

Estensione: supponiamo che

(i) P_7 è vera

(ii) P_n vera $\Rightarrow$ P_{n+1} vera

Allora P_n è vera $\forall n \geq 7$

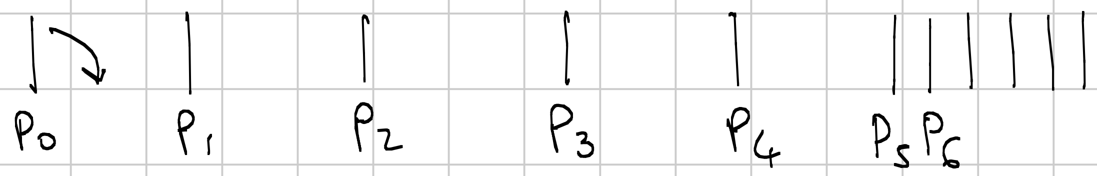
— — —

Altra estensione

(i) P_0 è vera

(ii) Se $n \geq 5$ P_n vera $\Rightarrow$ P_{n+1} vera

Allora non si può concludere niente



Esempi di dimostrazione per induzione

$\boxed{\text{Es. 1}}$ $$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad P_n$$

Vera $\forall n \geq 1$.

$\boxed{\text{Passo base}}$ $\boxed{n=1}$ $$1 = \frac{1\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1 \qquad \text{ok.}$$

Per scrupolo provo $\boxed{n=2}$ $$1+2 = \frac{\cancel{2}\cdot 3}{\cancel{2}} \qquad \text{Ok}$$

$\boxed{\text{Passo Induttivo}}$ $\boxed{\text{Hp}}$ $$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\boxed{\text{Tesi}}$ $$1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Devo: dimostrare la tesi usando l'ipotesi

Dim. $\underbrace{1+2+\dots+n}+\underbrace{(n+1)} \overset{\text{uso Hp}}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) =$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho ottenuto la tesi. $\square$

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ Dimostrare che $2^n \geq n+1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Passo base: $\boxed{n=0}$ $2^0 \geq 0+1$; $1 \geq 1$ ok

Passo induttivo Hp $2^n \geq n+1$

Tesi $2^{n+1} \geq n+2$

Dim.

$$2^{n+1} \overset{\text{P.C.}}{=} 2 \cdot \underbrace{2^n \geq 2(n+1)}_{\text{uso Hp}} =$$

$$= 2n + 2 \underset{\text{ovvio}}{\geq} n + 2$$

Guardando il primo e l'ultimo, abbiamo dim. che

$2^{n+1} \geq n+2$, cioè la tesi.

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ $n!$ ← n fattoriale

$0! = 1$ $\quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ per $n \geq 1$

$1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = \ldots = 24$

Dimostrare che $n! \geq 2^n \quad \forall n \geq 4$

$\boxed{\text{Passo base}}$ $\boxed{n=4}$ $4! \geq 2^4$; $24 \geq 16$ ok.

$\boxed{\text{P.I.}}$ Hp $n! \geq 2^n$ Tesi $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

Dim.
$$(n+1)! = (n+1)\underbrace{(n)(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}_{n!}$$
$$= (n+1)\cdot n!$$

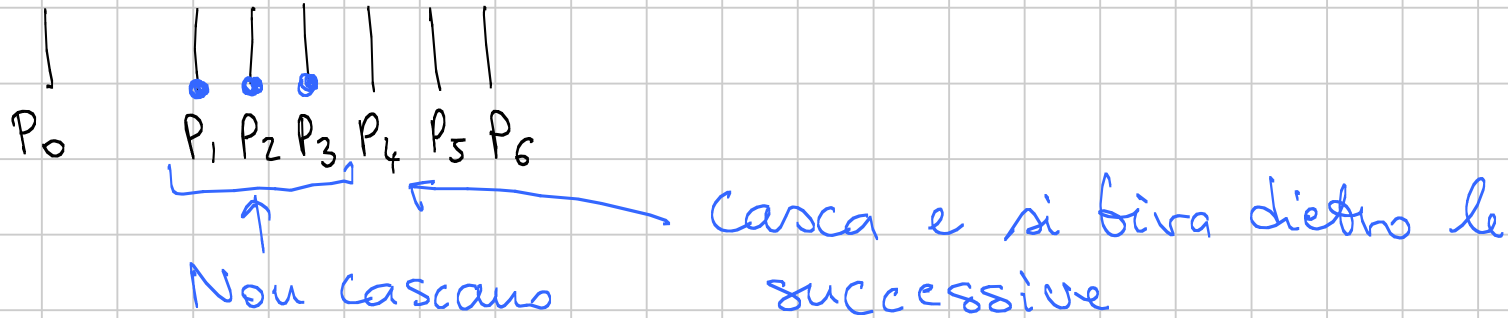
Uso Hp
$$\geq (n+1)\cdot 2^n \geq 2^{n+1}$$
SPERO

Ok

Controllo ultimo passaggio $(n+1)2^n \overset{?}{\geq} 2^{n+1}$

$(n+1)\cdot \cancel{2^n} \geq 2\cdot\cancel{2^n}$ $\quad n+1 \geq 2$, cioè $n \geq 1$

N.B. Il meccanismo di caduta vale per $n \geq 1$



Esempio Disuguaglianza di BERNOULLI

Per ogni $\boxed{x > -1}$ si ha che $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{P.B.}}$ $\boxed{n=0}$ $(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x$; $1 \geq 1$ OK

$\boxed{\text{P.I.}}$ Hp $(1+x)^n \geq 1+nx$ Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim.

$$\boxed{(1+x)^{n+1}} = (1+x)\cdot(1+x)^n$$

Uso Hp $\longrightarrow$ $\geq (1+x)\cdot(1+nx)$

$$= 1+nx+x+nx^2$$

$$= 1+(n+1)x+\boxed{nx^2}$$

è sempre ≥ 0, quindi se lo tolgo ottengo q.c. di più piccolo

$$\boxed{\geq 1+(n+1)x}$$ Tesi

L'Hp diceva $(1+x)^n \geq 1+nx$ Io ho dedotto che

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$$

Posso molt. IMPUNEMENTE se e solo se $(1+x)>0$

cioè $\iff x>-1$.

Esempio 5

$$1+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esempio 6 Per ogni $a\neq 1$

$$1+a+a^2+a^3+\dots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA } 5}$

Consideriamo funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

<u>Def.</u> f si dice PARI se $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f si dice DISPARI se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

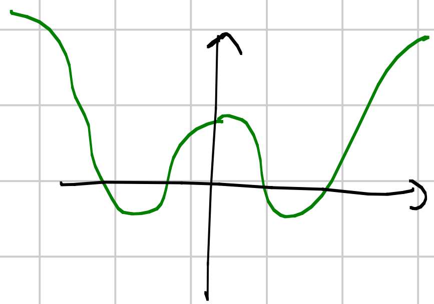
f si dice PERIODICA se $\exists\, T > 0$ tale che

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

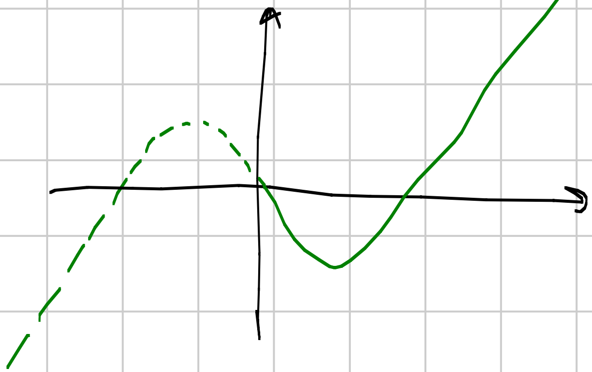
In tal caso il più piccolo $T > 0$ con questa proprietà (se esiste) si dice MINIMO PERIODO

Graficamente

f pari $\iff$ grafico simmetrico
risp. asse y



f dispari $\iff$ grafico simm.
rispetto all'origine

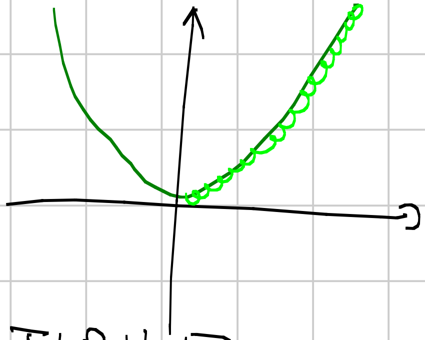


f periodica $\iff$ quello che succede
tra 0 e T si ripete
uguale prima e dopo

FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NO INJ. NO SURG.

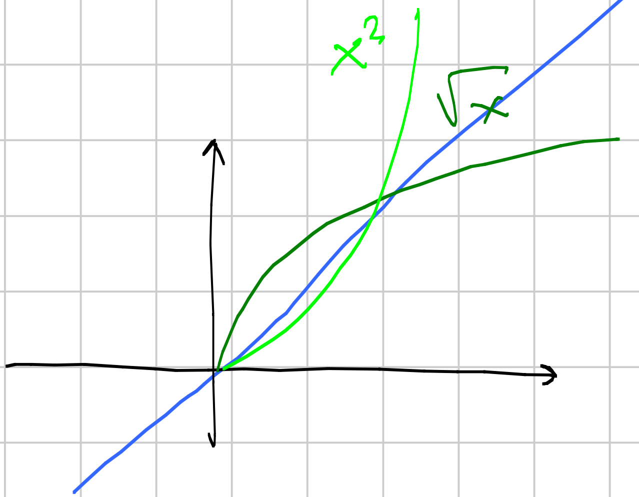
PARI



$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ INVERTIBILE.

La sua inversa è una funzione $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

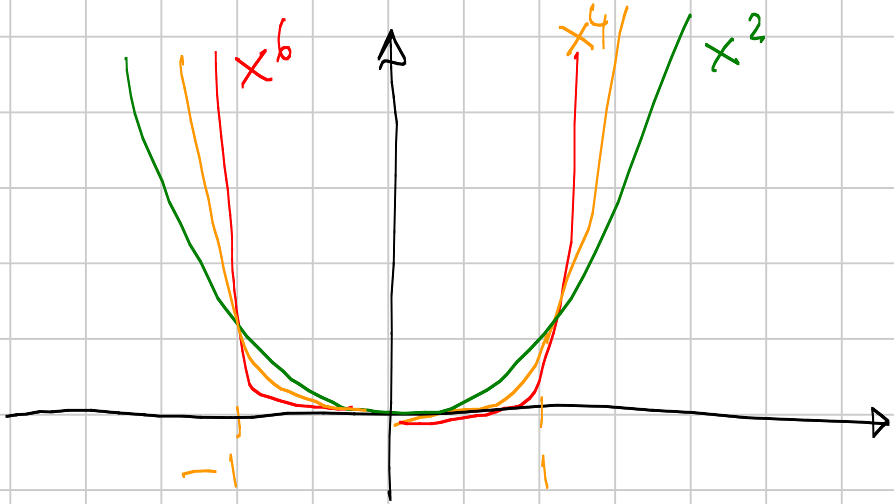
$$g(x) = \sqrt{x}$$



N.B. Per definizione $\sqrt{x}$ accetta in INPUT solo valori $x \geq 0$ e restituisce in OUTPUT valori ≥ 0.

N.B. I grafici di una funzione e della sua inversa sono simm. rispetto bisettrice $y = x$

$f(x) = x^4, x^6, x^8, \dots$ stessa cosa $\rightsquigarrow \sqrt[4]{x}, \sqrt[6]{x}, \sqrt[8]{x}$



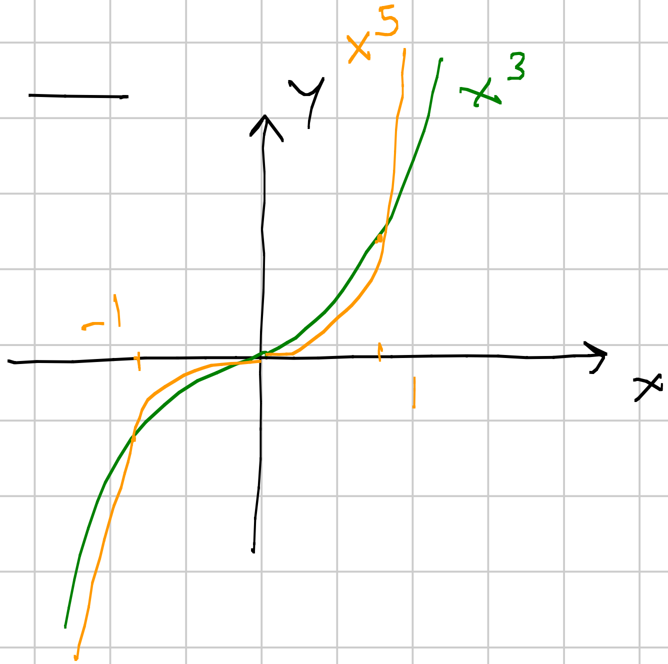
—o—o—

$f(x) = x^3$ ← FUNZIONE DISPARI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ INJ e SURG

$\Downarrow$

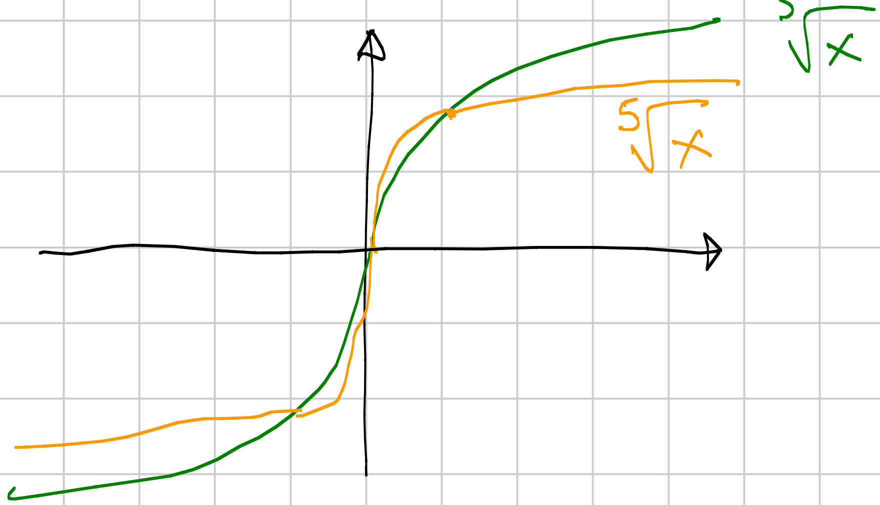
INVERTIBILE



L'inversa è una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

$\sqrt[3]{x}$ accetta in INPUT sia pos. sia neg. e restituisce in OUTPUT valori con lo stesso segno

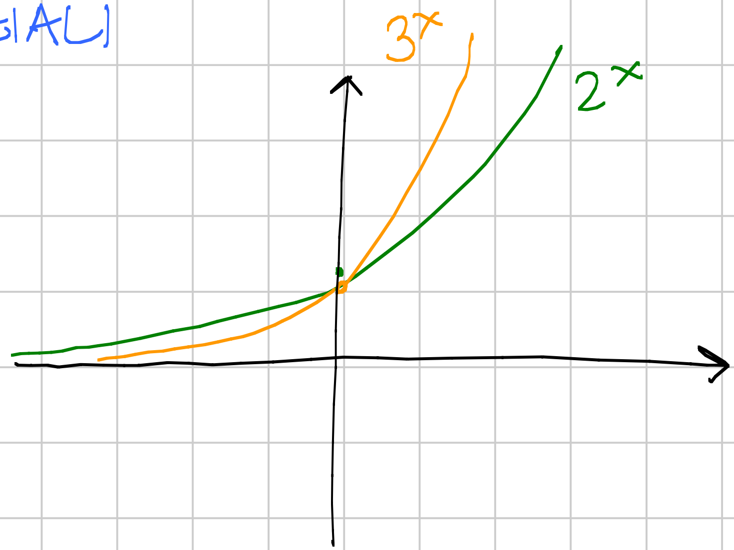


Stessa cosa per $x^5, x^7, x^9, \ldots$ $\quad \sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x}, \sqrt[9]{x}, \ldots$

FUNZIONI ESPONENZIALI $f(x) = 2^x$

$\boxed{N.B.}$ x base, espon = numero ← POTENZE

x esponente ← ESPONENZIALI



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI INJ.
NO SURG.

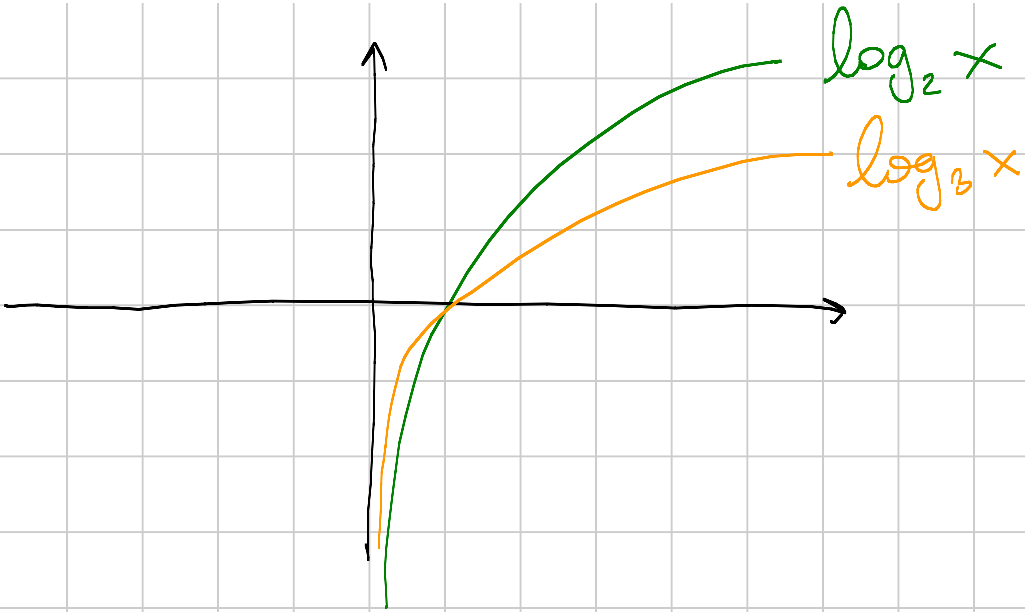
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$

INVERTIBILE

La sua inversa è una funzione $g: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$

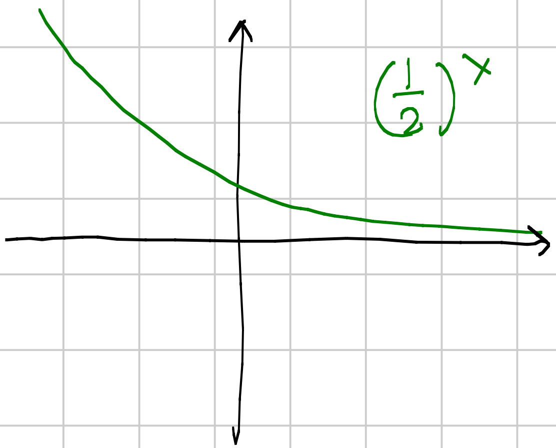
$g(x) = \log_2 x$

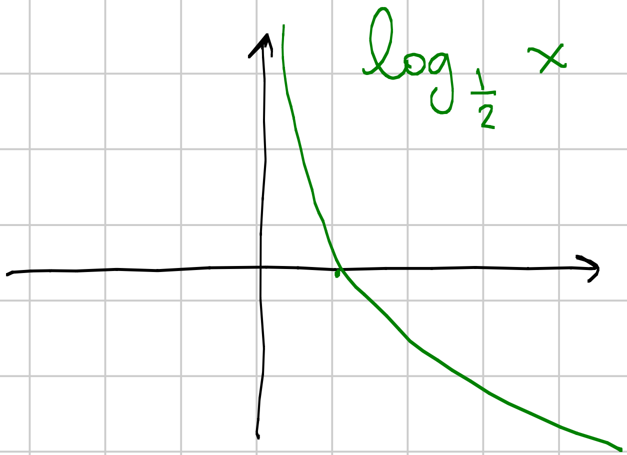
$\log_2 x$ accetta in INPUT valori >0



Stessa per funzioni a^x con $a > 1$

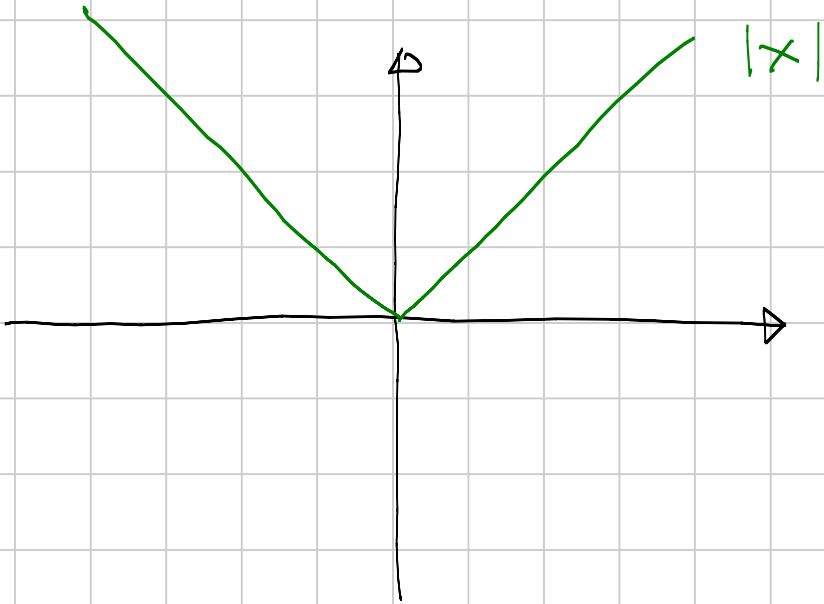
a^x con esponente $0 < a < 1$





$f(x) = |x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



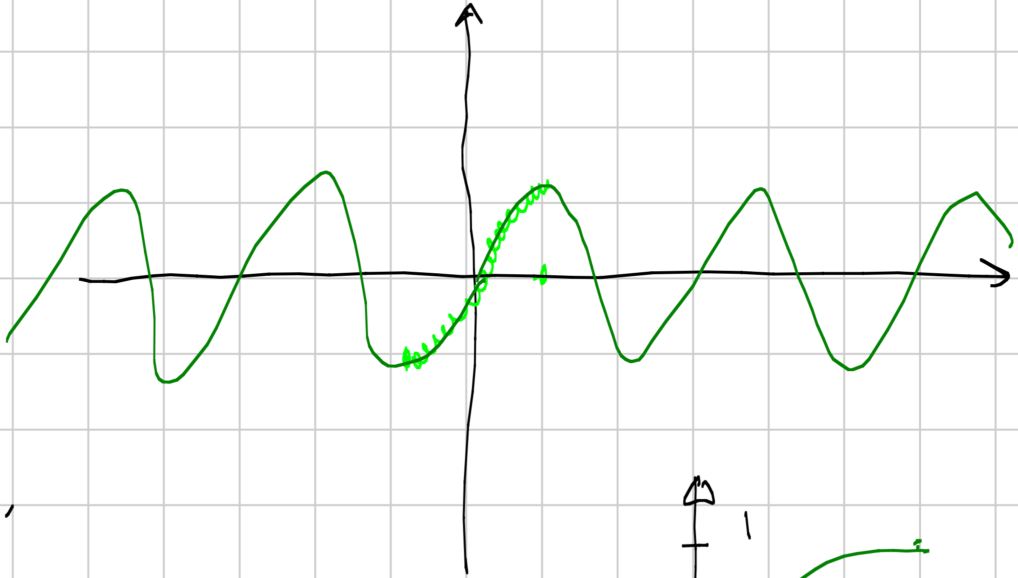
Funzione pari

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NO INJ. NO SURG.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ NO INJ. SI SURG.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$f(x) = \sin x$

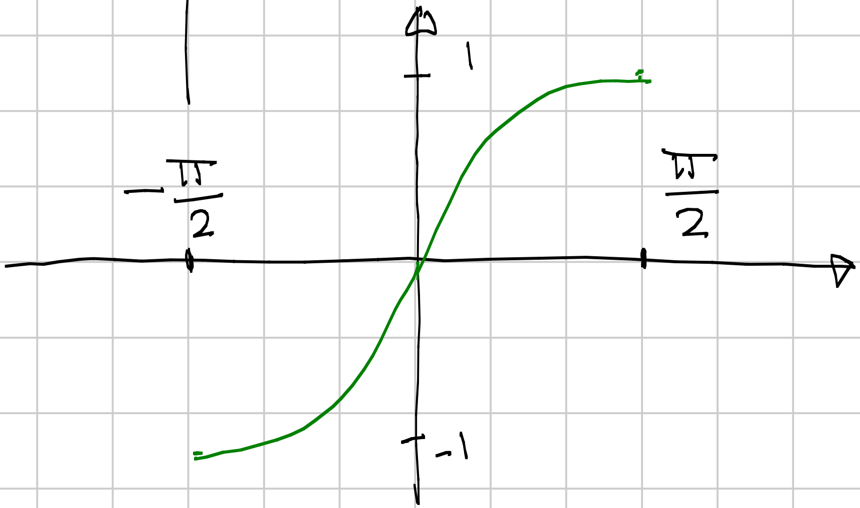


DISPARI

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NO INJ.

NO SURG.

$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$



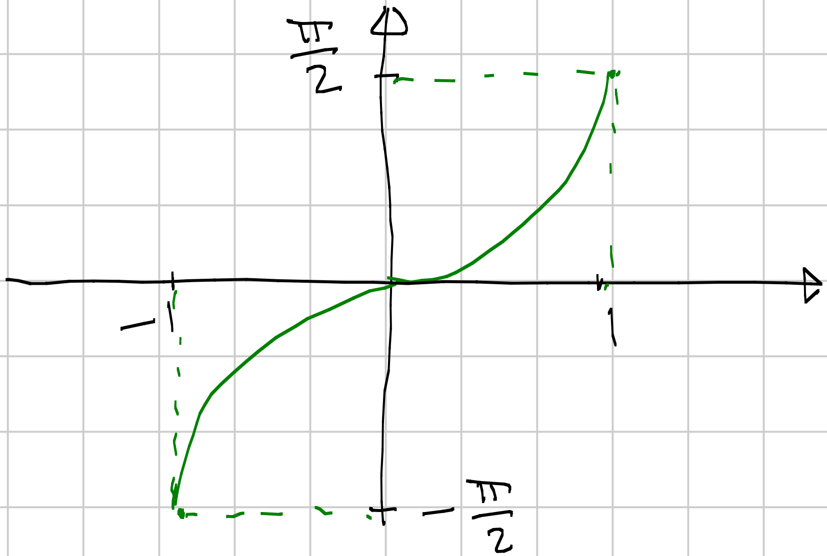
INVERTIBILE

La sua inversa è $g: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

INPUT: valori $x \in [-1, 1]$

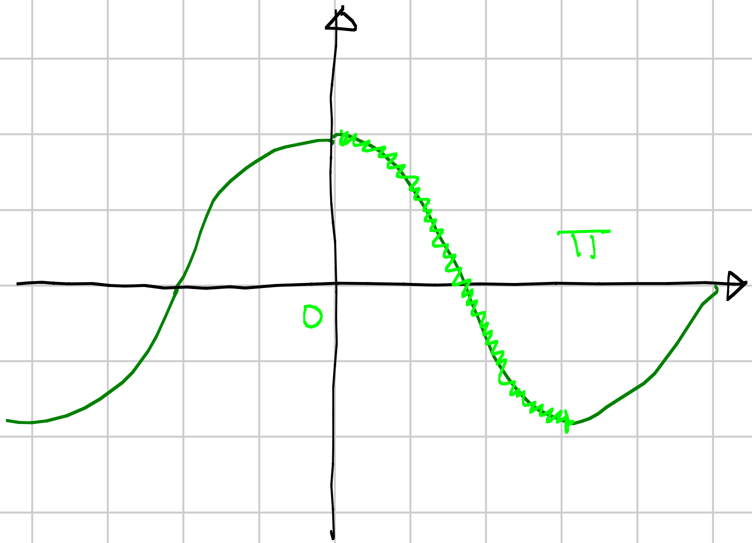
$$g(x) = \arcsin(x)$$

OUTPUT: valori in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$f(x) = \cos x$

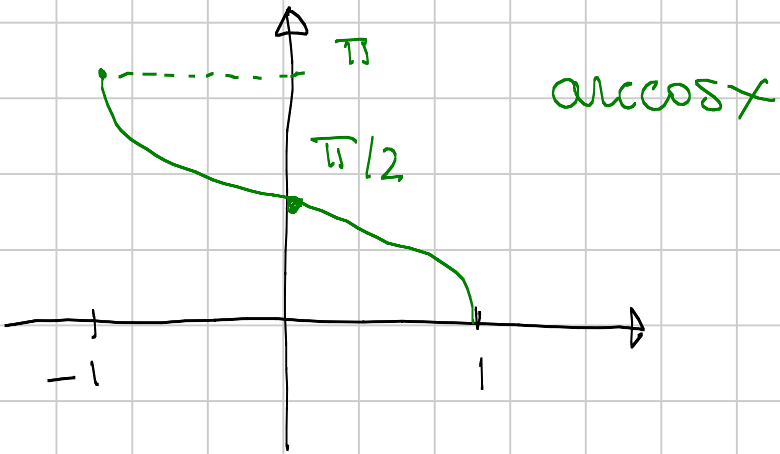
PARI



$f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

INVERTIBILE

e l'inversa $g : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ è $g(x) = \arccos x$



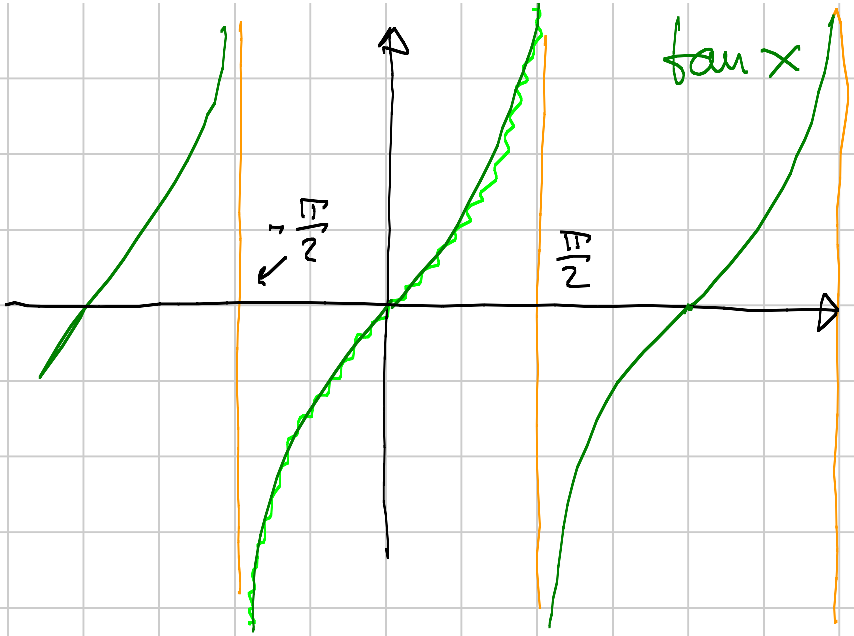
$f(x) = \tan x$

DISPARI

$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

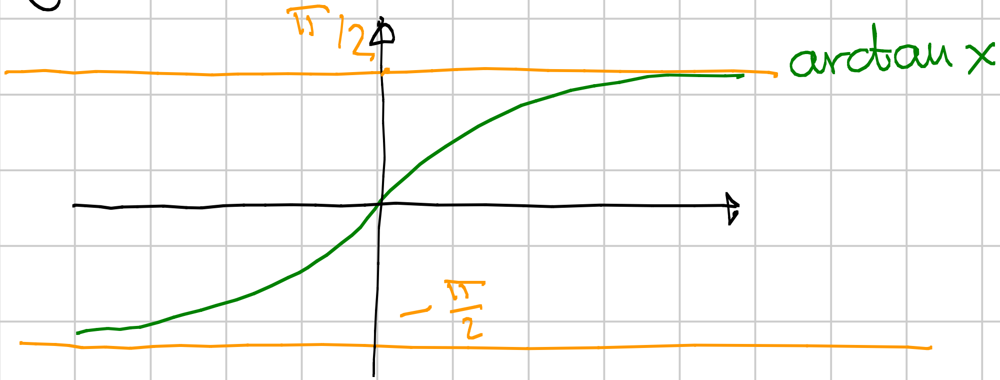
$\updownarrow$

$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



INVERTIBILE. L'inversa è una funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$g(x) = \arctan x$



INPUT: ogni $x \in \mathbb{R}$

OUTPUT: solo valori in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Esempi

$$\sin\left(\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$\arcsin(\sin 1) = 1 \qquad \text{SI}$$

$$\arccos(\cos 1) = 1$$

$$\arcsin(\sin 2) = 2 \quad \longleftarrow \quad \text{NO}$$

arcsin NON SPUTA ROBA $> \pi/2$

$$\arccos(\cos 2) = 2 \quad \longleftarrow \quad \text{SI}$$

$$\arccos(\cos 3) = 3 \quad \longleftarrow \quad \text{SI}$$

$$\arccos(\cos 4) = 4 \quad \longleftarrow \quad \text{NO}$$

arccos SPUTA ROBA $\leq \pi$
Non può DARE 4.