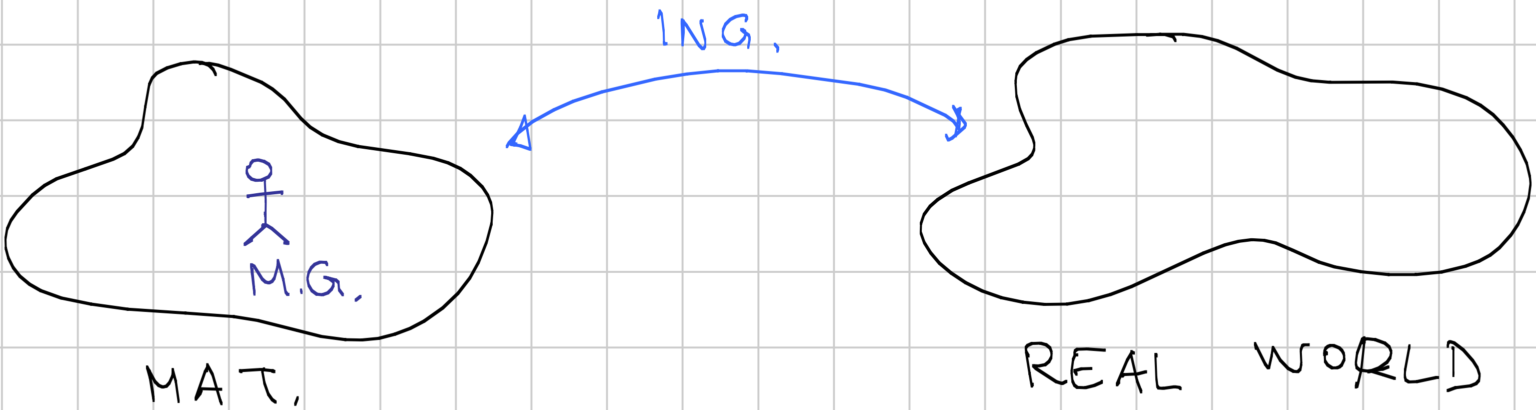
MAT 1 TLC $\boxed{\text{ORA 1}}$

Titolo nota 03/10/2006

Conoscenze di base $\leq$ P22 $\rightarrow$ Rifare esercizi PRECORSO sulla dispensa degli esercizi

Corso $\geq$ P23

Ruolo della matematica



INSIEMI e FUNZIONI

$a \in A$ a appartiene ad A $\qquad a \notin A$

elemento insieme

$A \ni a \qquad A \not\ni a$

Come si presenta un insieme?

1) Per elenco $\quad A = \{1, 3, 4, 8, b, d, ☺\}$ con l'accordo che le ripetizioni non contano

2) Per proprietà $\quad A = \{\text{persone in aula PN2}\}$

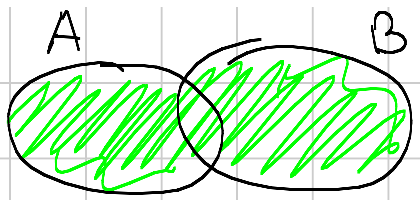
$= \{\text{interi positivi dispari}\}$

Operazioni tra insiemi

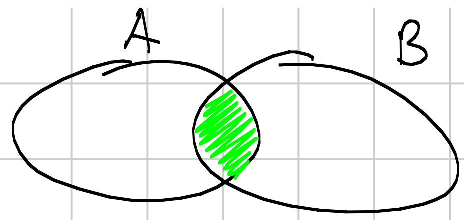
$A \cup B$ = unione = {el. che stanno in A o in B (o entrambi)}

$A \cap B$ = intersezione = {el. che stanno in A e anche in B}

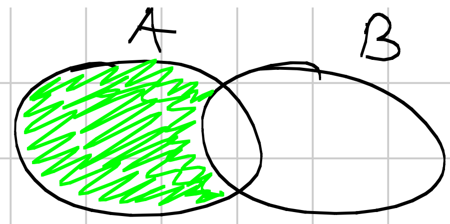
$A \setminus B$ = differenza = {el. che stanno in A, ma non in B}



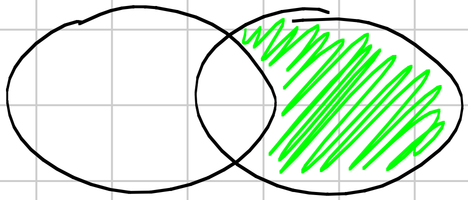
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



$B \setminus A$

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Sottoinsiemi

$B \subseteq A$ "B contenuto in A"

ogni elemento di B è anche el. di A

B può anche essere uguale ad A.

$\boxed{B \not\subseteq A}$

negazione

OCCHIO: $B \subset A$ ha significati diversi su testi diversi

$$B \subsetneq A$$

INSIEME DELLE PARTI

$\mathcal{P}(A) =$ insieme costituito dai sottoinsiemi di A

$= \{ B \subseteq A \}$

<u>Esempio</u> $A = \{1, 5\}$

$\mathcal{P}(A) = \{ \{1\}, \{5\}, \{1,5\}, \emptyset \}$

insiemi che contengono 1 solo elemento

insieme vuoto (non ha elem.) è contenuto in ogni altro insieme

$B = \{a, 3, ✪\}$ $\mathcal{P}(B) = \{ \emptyset, \{a\}, \{3\}, \{✪\}, \{a,3\}, \{a,✪\}, \{3,✪\}, \{a,3,✪\} \}$

Prodotto cartesiano

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A , b \in B \}$$

Esempio : $A = \{1, 5\}$ $B = \{ a, 3, \star \}$

$$A \times B = \{ (1,a), (1,3), (1,\star), (5,a), (5,3), (5,\star) \}$$

Esempio 2 $A \times A = A^2 = \{ (1,1), (1,5), (5,1), (5,5) \}$

coppie ordinate : questi 2 elementi sono diversi

$A = \{1, 5\}$
$A = \{5, 1\}$

stesso insieme

$(1,5)$ e $(5,1)$ sono 2 elementi DIVERSI dell' insieme $A \times A$

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$$

Domande Se A ha k elementi ($|A| = k$, $\#A = k$)
e B ha h elementi

num. el.

quanti el. ha $A \times B$?

$$|A \times B| = k \cdot h = |A| \cdot |B|$$

Quanti el. ha $\mathcal{P}(A)$ (tradotto: quanti sono i sottoinsiemi di A ?)

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$ Perché ?

Come costruire un sottoinsieme di $\{a, 1, 3, f\}$

a	1	3	f
SI	SI	SI	SI
NO	NO	NO	NO

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$$

<u>Esercizio</u> Quanti el. ha $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?

Quali sono questi elementi ?

D'ora in poi, quando si presenta un insieme per proprietà, scriveremo

$$B = \{x \in A : x \text{ gode della data proprietà}\}$$

così selezioniamo un sottoinsieme

MAT 1 TLC

ORA 2

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{\boxed{0}, 1, 2, 3, \dots\}$ = numeri NATURALI

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ = numeri INTERI RELATIVI

ZAHLEN = numeri in tedesco

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{Z} \ \ n \neq 0 \right\}$ = numeri RAZIONALI

Q sta per QUOZIENTI

$\mathbb{R} =$ "tutti i numeri" = numeri REALI

$\mathbb{C}$ = numeri COMPLESSI

Proprietà numeri reali

$\boxed{1}$ Propr. algebriche. Sui numeri reali sono definite 2 operazioni : $+$ e $\cdot$ con le seguenti proprietà

SOMMA PRODOTTO

(S1) $a+b=b+a$ $\forall a\in\mathbb{R}, \forall b\in\mathbb{R}$ $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ $a\cdot b=b\cdot a$ (P1) $\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$

(S2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ $\forall a,b,c$ $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (P2)

(S3) $\exists$ el. speciale (che si indica con 0) t.c. $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$

$$a+0=0+a=a$$

(P3) $\exists$ el. speciale (che si indica con 1) t.c.

$$a\cdot 1=1\cdot a=a$$

(S4) $\forall a\in\mathbb{R}$ $\exists$ un elemento che si indica con $-a$ t.c.

(P4) $\forall a\in\mathbb{R}, a\neq 0$, $\exists$ un elemento che si indica

$a + (-a) = 0$ $\quad \cancel{\mathbb{N}}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

opposto

con $\frac{1}{a}$ t.c. $\quad \cancel{\mathbb{N}}, \cancel{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

reciproco

(D) $\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

DISTRIBUTIVA

$\boxed{2}$ <u>ORDINAMENTO</u> Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ si ha che $a \leq b$ oppure $b \leq a$

(O1) $a \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

(O2) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$

(O3) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$

(OA1) Se $a \leq b$, allora

$$a + c \leq b + c \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

" Posso aggiungere impunemente a dx e sx "

(OA2) Se $a \leq b$, allora

$$a \cdot c \leq b \cdot c \qquad \forall c > 0$$

$\boxed{\text{OCCHIO}}$ Se $a \leq b$, allora

$$a \cdot c \geq b \cdot c \qquad \forall c < 0$$

" Posso moltiplicare a dx e sx per roba positiva impunem.
" " per roba < 0, ma devo girare i versi "

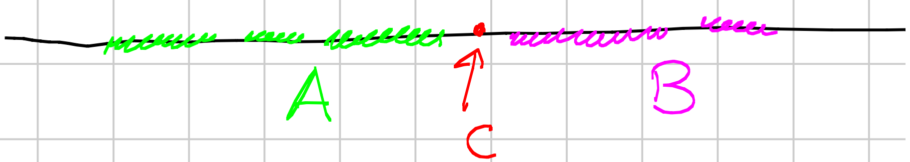
Tutte le proprietà elencate valgono in $\mathbb{Q}$.
Cosa distingue $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{R}$?

$\boxed{3}$ ASSIOMA DI CONTINUITÀ

Siano dati 2 sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti
Diciamo che A sta a sinistra di B se

$\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha che

$$a \leq b.$$



Assioma continuità: se A sta a sx di B, allora

$\exists\ c \in \mathbb{R}$ tale che

separatore

$a \leq c \quad \forall a \in A$ (più grande di tutti el. di A)

$c \leq b \quad \forall b \in B$ (più piccolo tutti el. B)

Domanda: se A sta a sx di B, cosa possiamo dire di
$A \cap B$?

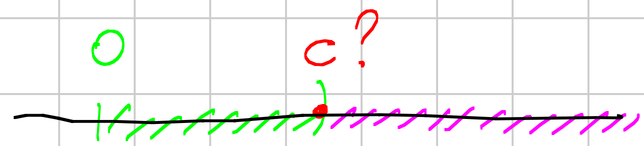
$$A \cap B \nearrow \emptyset$$

$$A \cap B \searrow |A \cap B| = 1$$ contiene un solo elemento

in questo caso l'unico el. in comune è il separatore.

L'esistenza del separatore vale in $\mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{Q}$.

$$A = \{ x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2 \}$$



$$B = \{ x \in \mathbb{Q} ; x > 0 \text{ e } x^2 > 2 \}$$

A sta a sx di B

Se ci fosse un separatore $c \in \mathbb{Q}$, dovrebbe essere $c^2 = 2$ ma in $\mathbb{Q}$ non esistono numeri il cui quadrato è 2.

Dunque in $\mathbb{Q}$ PUÒ non esistere il separatore.

In $\mathbb{R}$ esiste sempre (nell'esempio $c = \sqrt{2}$).

FUNZIONI (tra insiemi)

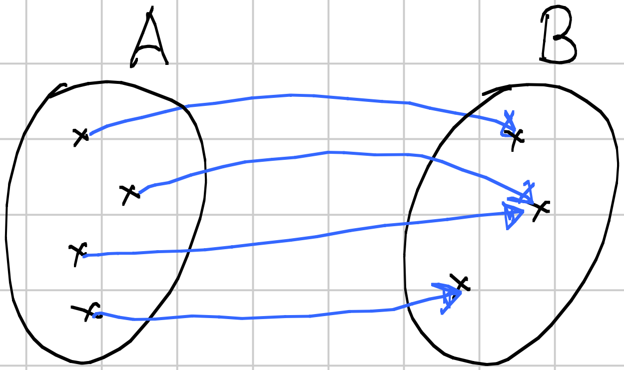
Una funzione sono 3 cose:

* un insieme di partenza
* un insieme di arrivo
* una legge che ad ogni el. dell'insieme di partenza associa 1 solo el. dell'ins. di arrivo

$$f : A \longrightarrow B$$

insieme partenza

insieme arrivo



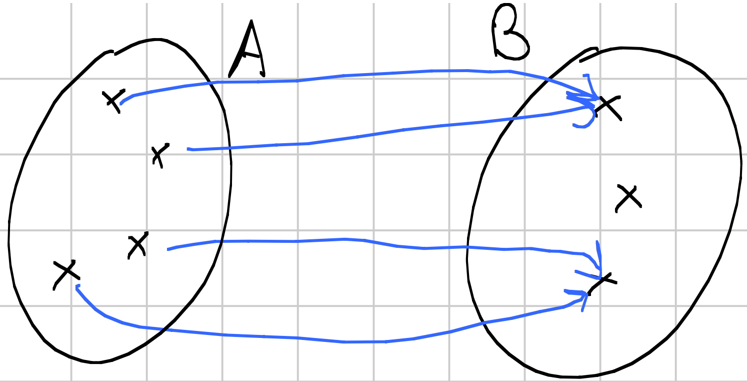
Def. 1 Una funzione $f: A \to B$ si dice INIETTIVA se "el. diversi di A vanno a finire in el. diversi di B"

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

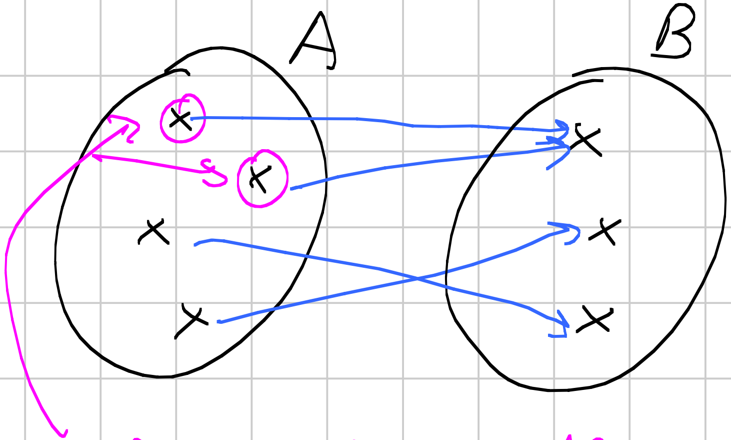
oppure (che è lo stesso) $f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$

Def 2 Una funzione $f: A \to B$ si dice SURGETTIVA se "tutti gli el. di B vengono raggiunti"

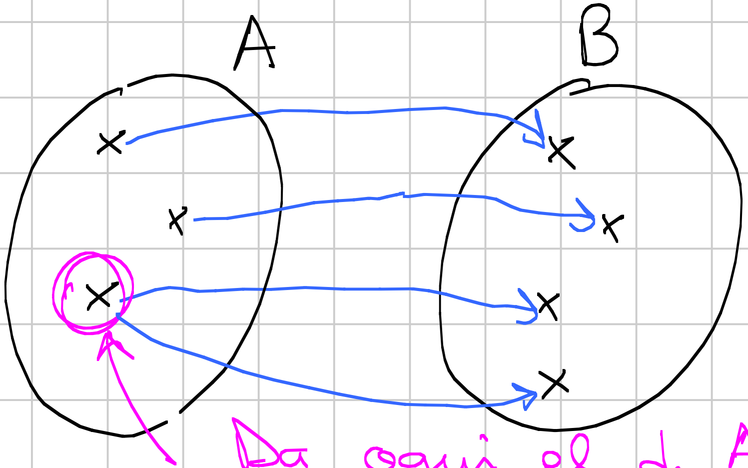
$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad b = f(a)$$



NO INIETTIVA, NO SURG.



NO INIETTIVA
SI SURGETTIVA

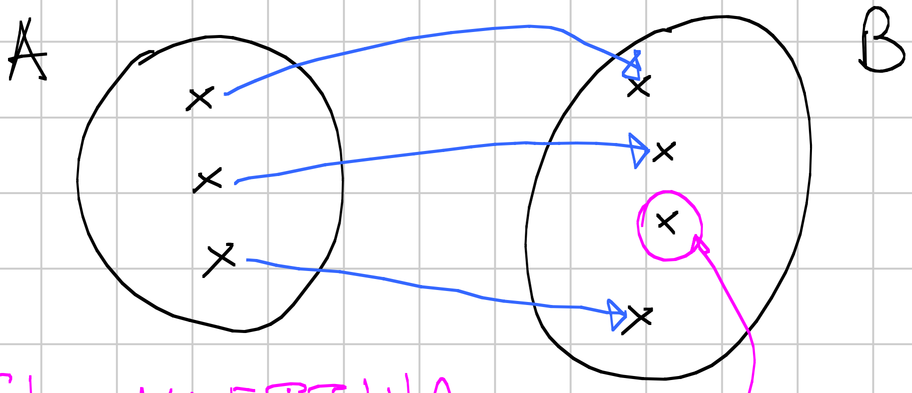


NON È UNA FUNZIONE

Da ogni el. di A deve partire un'unica freccia!?!

MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 3}}$



SI INIETTIVA

NO SURGETTIVA

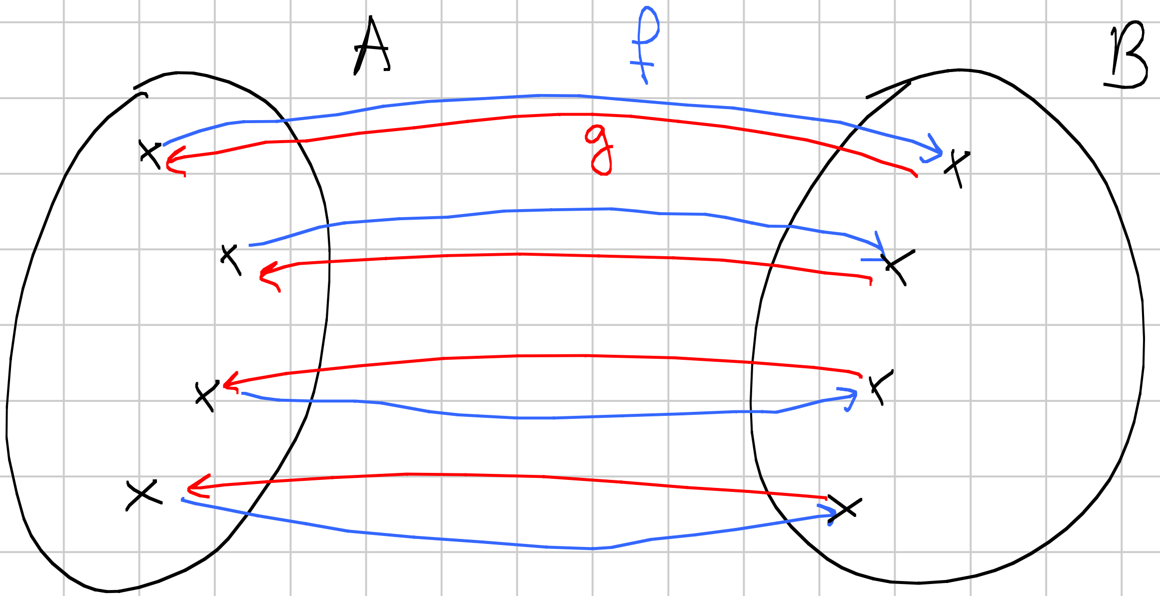
<u>Def.</u> 3 $f : A \to B$ si dice BIGETTIVA se è INIETTIVA e SURGETTIVA

<u>Def.</u> $f : A \to B$ si dice <u>invertibile</u> se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

← con partenza da A

$f(g(b)) = b \quad \forall\, b \in B$ ← con partenza da B



Le frecce interpretate al contrario rappresentano una funzione

$g : B \to A$

La funzione inversa esiste sempre? NO

Esiste $\iff$ f è BIGETTINA

Grafico di $f = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$ per proprietà

Esempi $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

NO INIETTIVA $f(5) = f(-5)$

Diversi

NO SURGETTIVA Non prende i valori < 0

$f: A \to B$

$f(x) = x^3$

A	B	INJ.	SORG.
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	NO	NO
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	NO	SI
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\mathbb{R}$	SI	NO
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	SI	SI

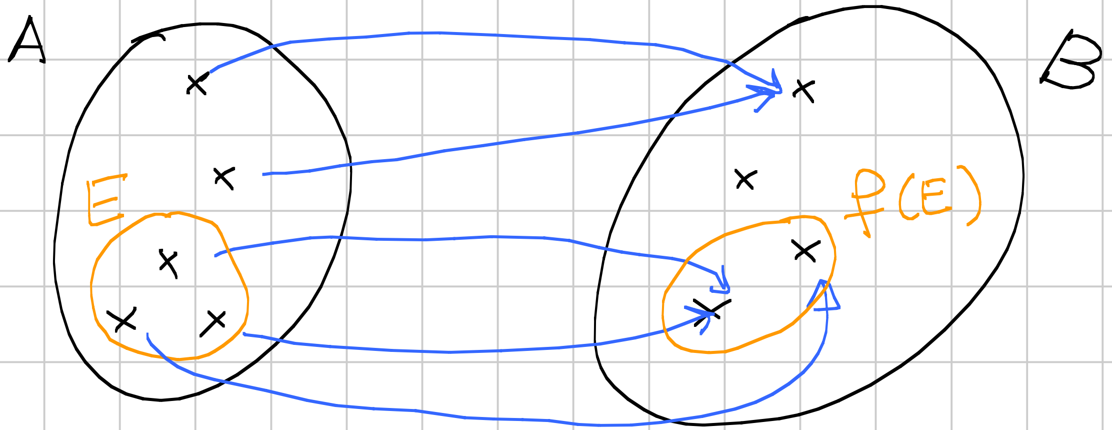
IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

$f : A \longrightarrow B$ sia dato $E \subseteq A$

$$f(E) = \{ f(a) : a \in E \}$$

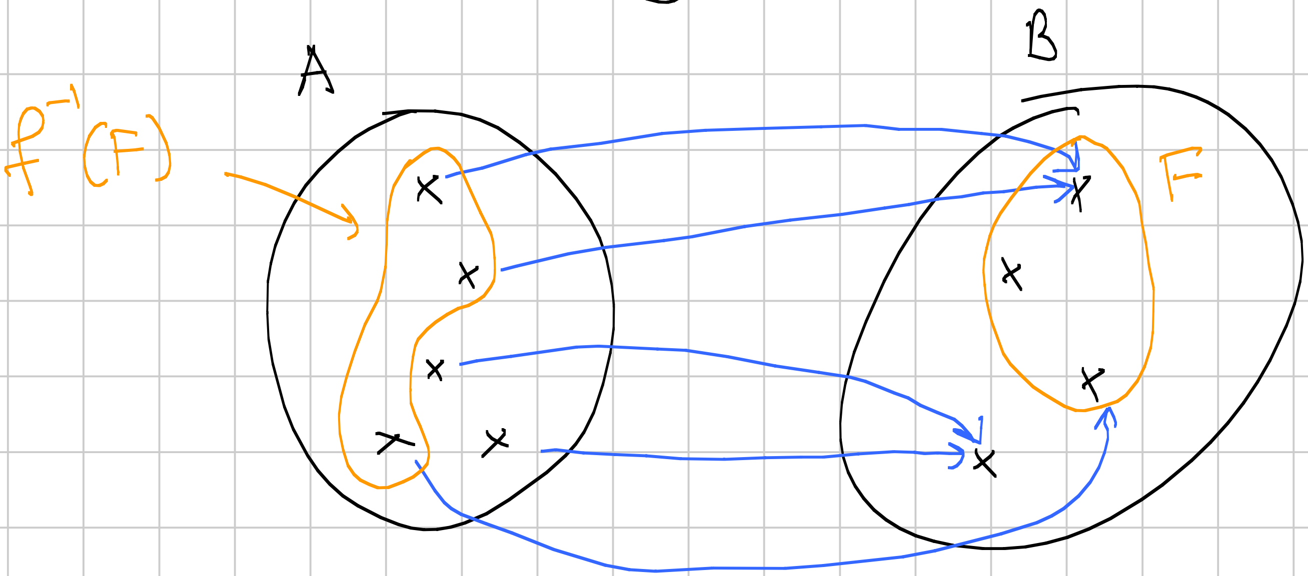
per ELENCO

IMMAGINE DELL'INSIEME E



$$f(E) = \{ b \in B : \exists\, a \in E \text{ con } f(a) = b \}$$

Sia ora $F \subseteq B$



$$f^{-1}(F) = \{ a \in A : f(a) \in F \}$$

pres. per PROPRIETÀ

controimmagine dell'insieme F

Proprietà dell' immagine.

Una funzione $f : A \to B$ è surgettiva $\Longleftrightarrow f(A) = B$

Se prendo $E = A$ $\quad$ $f(A)$ risulta l'insieme di tutti gli el. di B raggiunti dalla funzione

Se è tutto B, f è SURG.

Se non è tutto B, f non è surgettiva

ACHTUNG Il simbolo f^{-1} viene usato per indicare almeno 3 cose diverse

* La controimmagine di un insieme
* La funzione inversa (quella che prima abbiamo indicato con g)
* $\dfrac{1}{f(x)}$, cioè il reciproco della funzione f.

Il contesto aiuta a distinguere i significati.

INIETTIVITÀ, SURGETTIVITÀ, GRAFICI, EQUAZIONI

$f : A \to B$.

Fissato un elemento $\lambda \in B$, consideriamo l'eq.

$$f(x) = \lambda$$

"cercare gli el. di A che vanno a finire in λ"

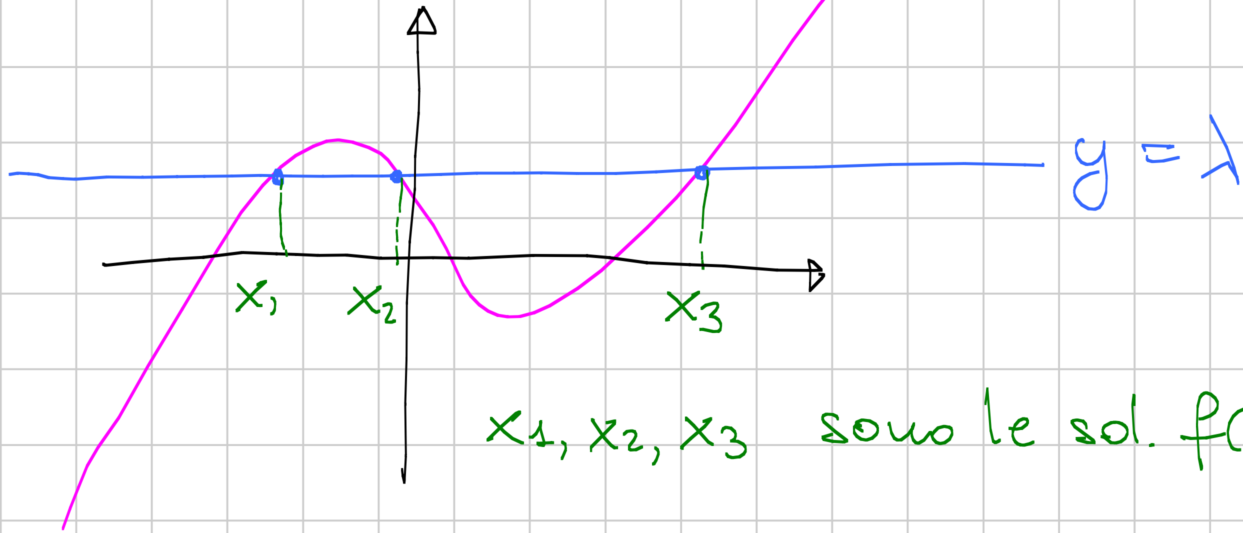
Questa equazione

* ha almeno 1 sol. per ogni λ se e solo se f è surgettiva
* ha al più 1 sol. per ogni λ se e solo se f è iniettiva
* ha esatt. 1 sol. $\iff$ f bigettiva

$f(x) = \lambda$

* 1 o + sol. $\iff$ surg.
* 0 o 1 sol. $\iff$ iniettiva
* esatt. 1 sol. $\iff$ bigettiva

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



x_1, x_2, x_3 sono le sol. $f(x) = \lambda$

Risolvere $f(x) = \lambda$ vuol dire intersecare il grafico con una // asse x ad altezza λ

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

* f è SURGETTIVA $\Longleftrightarrow$ ogni // asse x interseca il grafico in almeno 1 p.to
* f è INIETTIVA $\Longleftrightarrow$ ogni // asse x interseca il grafico in al max 1 p.to (0 o 1 pto)
* f è BIGETTIVA $\Longleftrightarrow$ ogni // asse x interseca in esattamente 1 p.to

$f(x) = \lambda$

La coordinata x di quel p.to è

$x = g(\lambda)$ ← funzione inversa