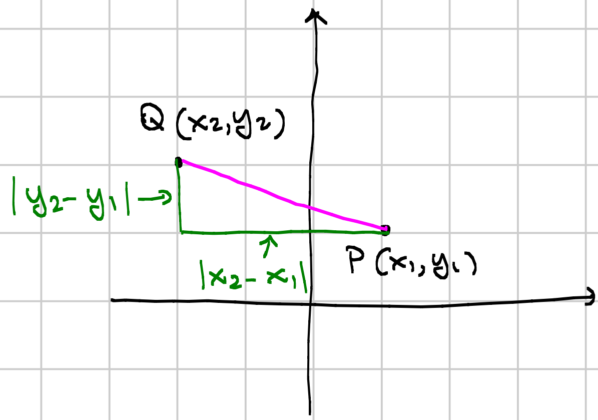
GEOMETRIA ANALITICA

Titolo nota 25/09/2009

Piano Cartesiano: insieme delle coppie (x, y) di numeri reali.
Ogni coppia si identifica con un punto.



$$\text{Distanza}\,(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EQUAZIONE DELLA RETTA

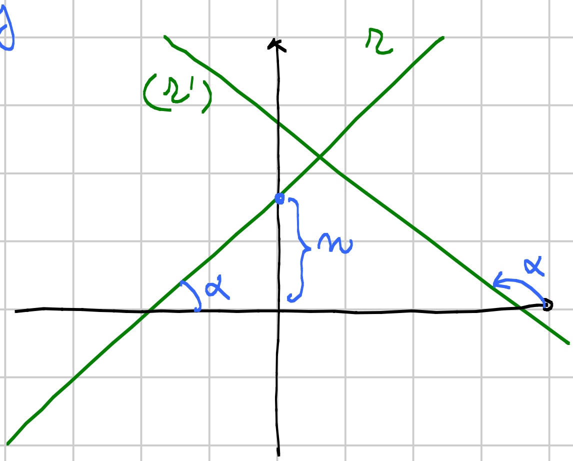
- Forma esplicita $\quad y = mx + n$
- Forma implicita $\quad ax + by + c = 0$

Vantaggi forma esplicita: due rette coincidono se e solo se hanno lo stesso m e lo stesso n (in forma implicita non è vero: $x + 2y + 3 = 0$ e $2x + 4y + 6 = 0$ sono la stessa retta, ma hanno in forma implicita coeff. diversi)
Svantaggi forma esplicita: non prende le rette verticali $x = a$.

Significato dei coefficienti in forma esplicita

$$y = \boxed{m}\,x + \boxed{n}$$

coeff. angolare $\qquad$ quota a cui la retta interseca l'asse y



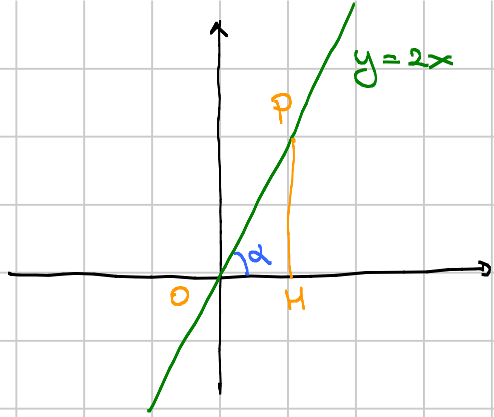
In particolare $m = \tan\alpha$, dove α è l'angolo formato tra la retta e il semiasse positivo delle x.
In particolare:

- $m > 0 \Rightarrow$ la retta "sale" (r)
- $m = 0 \Rightarrow$ la retta è // asse x
- $m < 0 \Rightarrow$ la retta "scende" (r')

- $n > 0 \Rightarrow$ la retta interseca asse y sopra l'origine

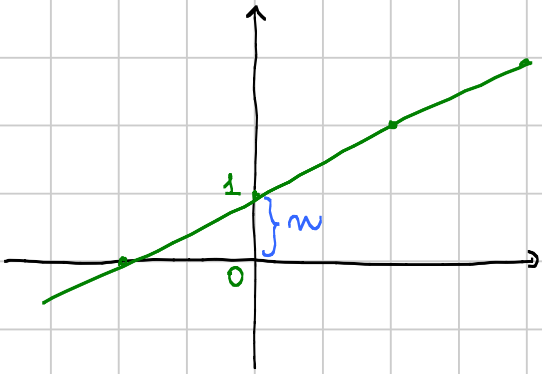
Coeff. angolare $= 2$ vuol dire
"se vado a dx di 1, allora salgo di 2".
Infatti

$$2 = \frac{PH}{OH} = \tan \alpha = m$$

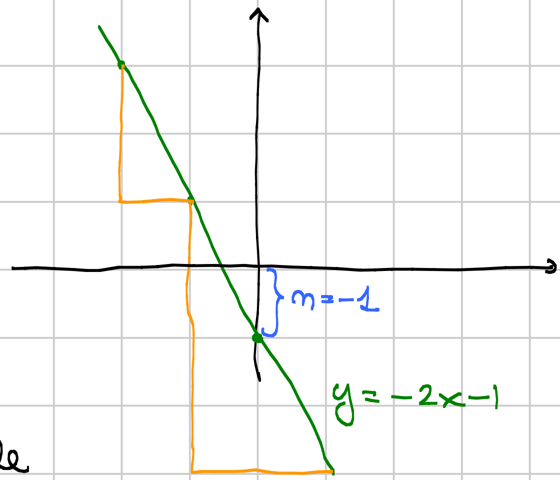


Coeff. angolare $= \frac{1}{2}$ perchè se vado a dx di 2 salgo di 1.

Equazione: $y = \frac{1}{2}x + 1$, oppure
(in forma implicita) $2y - x - 2 = 0$)



$n = -1$ (deduce dal punto di incontro con l'asse y)
$m = -2$ (lo deduco dal fatto che quando vado a dx di 1, scendo di 2)
(volendo è anche il rapporto tra il cateto verticale ed il cateto orizzontale tra i triangoli che hanno cateti // agli assi e ipotenusa sulla retta.



— o — o —

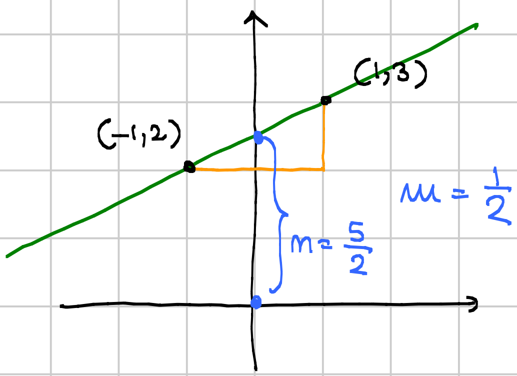
$\boxed{\text{RETTA PER 2 PUNTI}}$ Scrivere la retta passante per $(-1,2)$ e $(1,3)$

Approccio "formale": scrivo $y = mx + n$
e impongo di passare per i 2 punti

$$\begin{cases} 2 = m(-1) + n & \text{Passare per } (-1,2) \\ 3 = m \cdot 1 + n & \text{Passare per } (1,3) \end{cases}$$

Ottengo un sistema in m ed n che si risolve:

$$\begin{cases} 2 = -m + n \\ 3 = m + n \end{cases} \qquad \text{Sommo: } 5 = 2n \Rightarrow n = \frac{5}{2}$$



Ricavo m dalla 2ª equazione (o dalla 1ª): $m = 3 - n = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

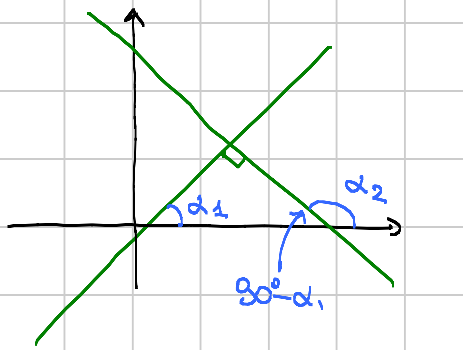
Equazione richiesta:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

RETTE PARALLELE E PERPENDICOLARI

Prendiamo 2 rette: $y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 x + n_2$. Allora

- le 2 rette sono PARALLELE se e solo se $m_1 = m_2$
  (infatti: parallele $\Leftrightarrow$ stesso angolo con semiasse x positivo
  $\Leftrightarrow$ stessa tangente $\Leftrightarrow$ stesso coeff. angolare)
- le 2 rette sono PERPENDICOLARI se e solo se $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$
  La relazione tra i 2 angoli è:
  $\alpha_2 = 90° + \alpha_1$ e



$$m_2 = \tan\alpha_2 = \tan(90° + \alpha_1) = -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$$

archi associati

$\alpha_2 + (90° - \alpha_1) = 180°$

<u>Esercizi</u> ① Calcolare l'eq. della retta passante per $(2,3)$ e parallela alla retta $2x - 5y + 6 = 0$

1° passo: Ricavo coeff. angolare di $2x - 5y + 6 = 0$, $5y = 2x + 6$

$$y = \boxed{\frac{2}{5}}\,x + \frac{6}{5}$$

2° passo: La retta richiesta è // a quella data, quindi ha coeff. angolare $= \dfrac{2}{5}$; $y = \dfrac{2}{5}x + n$

3° passo: Determino n imponendo di passare per $(2,3)$. Sostituisco $(2,3)$

$$3 = \frac{2}{5}\cdot 2 + n \Rightarrow n = 3 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$$

L'equazione finale è $y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{11}{5}$, oppure in forma implicita $2x - 5y + 11 = 0$.

Verifico che passi effettivamente per il punto: $\underset{\uparrow\, x}{2}\cdot 2 - 5\cdot \underset{\uparrow\, y}{3} + 11 = 0$

Esercizio 2 Det. la retta perpendicolare a $x+3y-4=0$ e passante per $(3,-1)$.

1° passo $x+3y-4=0$, $3y=-x+4$, $y=\boxed{-\frac{1}{3}}x+\frac{4}{3}$

2° passo La retta che sto cercando avrà coeff. ang. 3

$$y=3x+n$$

3° passo Impongo di passare per $(3,-1)$: $\underset{y}{\underset{\uparrow}{-1}} = 3\cdot \underset{x}{\underset{\uparrow}{3}}+n \Rightarrow n=-10$

Equazione richiesta: $y=3x-10$.

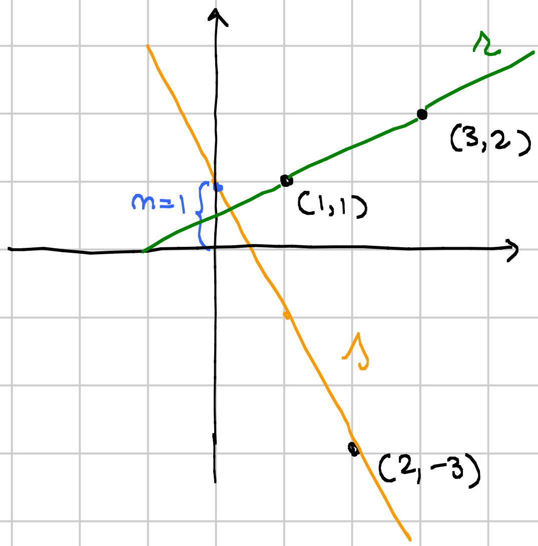
—o—o—

Esercizio 3 Det. eq. retta che passa per $(2,-3)$ ed è perpendicolare alla retta passante per $(1,1)$ e $(3,2)$

Soluzione "con i quadretti":

- Mi serve il coeff. angolare di r: $\frac{1}{2}$
- Il coeff ang. della retta richiesta è -2
- A questo punto è chiaro che deve essere $n=1$.

Equazione di r: $y=-2x+1$



Approccio sistematico:

1° passo: scrivere l'equazione di r imponendo di passare per $(1,1)$ e $(3,2)$: si ottiene $y=\boxed{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{2}$

2° passo: scrivere la retta s incognita nella forma $y=\boxed{-2}x+n$

3° passo: ricavare n imponendo di passare per $(2,-3)$:

$$\underset{y}{\underset{\uparrow}{-3}} = -2\cdot(\underset{x}{\underset{\uparrow}{2}})+n \Rightarrow n=1.$$

—o—o—

EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Dati: centro $C = (x_0, y_0)$ raggio $R > 0$

Circonferenza = insieme dei punti $P = (x,y)$ la cui distanza da C è uguale ad R

distanza di (x,y) da $(x_0, y_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$

Facendo i quadrati:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = R^2$$

$$\boxed{x^2+y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2+y_0^2 - R^2 = 0}$$

Eq. scritta usando come parametri x_0, y_0, R.

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

Si arriva in questa forma tutte le volte che x^2 e y^2 hanno lo stesso coefficiente.

Dati a, b, c, trovare x_0, y_0, R. Confrontando le equazioni si ha subito che

$a = -2x_0$ $\qquad x_0 = -\frac{a}{2}$

$b = -2y_0$ $\qquad y_0 = -\frac{b}{2}$

$c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$ $\qquad R^2 = x_0^2 + y_0^2 - c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$

Osservazione: può accadere che R^2 diventi ≤ 0. In quel caso l'equazione non rappresenta una circonferenza, ma l'insieme vuoto (se $R<0$) oppure un solo punto se $R=0$.

Esempi ①

$x^2+y^2=0$ L'unica sol. è il punto $(0,0)$

$x^2+y^2+1=0$ Impossibile (nessun punto la soddisfa)

Facendo i conti verrebbe fuori $R^2 = -1$.

Esempio 2 $\quad x^2+y^2-4x+6y-11=0 \qquad a=-4,\ b=6,\ c=-11$

Centro $(x_0, y_0) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2,-3)$

$$R^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c = \frac{16}{4}+\frac{36}{4}+11 = 4+9+11 = 24 \Rightarrow R=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

Modo alternativo di calcolare il raggio:

$x^2+y^2-4x+6y-11=0 \qquad x^2-4x+y^2+6y-11=0$

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9-11\underbrace{-4-9}_{\text{Compensano quelli aggiunti}}=0$$

$(x-2)^2+(y+3)^2=24$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad x_0=2,\ y_0=-3,\ R^2=24$

—o—o—

Esempio 3 $\quad 2x^2+2y^2-7x+5y=0$ centro e raggio.

Divido per 2: $\quad x^2+y^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}y=0.$

$x_0=-\frac{a}{2}=\frac{7}{4}, \quad y_0=-\frac{b}{2}=-\frac{5}{4} \qquad C=\left(\frac{7}{4},-\frac{5}{4}\right)$

A questo punto so che la circ. passa per $(0,0)$, conosco il centro, quindi $R=$ distanza di C dall'origine

$$R^2=\frac{49}{16}+\frac{25}{16}=\frac{74}{16} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{74}}{4}$$

—o—o—

Esempio 4 $\quad x^2+y^2-2x+4y=0$ Circ. che passa per $(0,0)$

Calcolare l'eq. della retta tangente alla circ. in $(0,0)$

Metodo meccanico

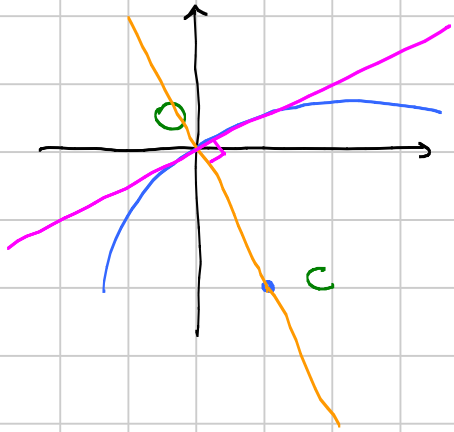
Scrivo l'eq. della generica retta passante per l'origine: $y=mx$ (ci sarebbe anche il problema della retta verticale).

$$\begin{cases} y=mx \\ x^2+y^2-2x+4y=0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema trovo le intersezioni tra la retta e la circonferenza. Sostituisco y nella 2ª eq. Imponendo $\Delta=0$ trovo quando è tangente.

Metodo alternativo: • trovo il centro C
• trovo la retta passante per C e O
• trovo la $\perp$ alla precedente passante per O.

* Centro: $x^2+y^2-2x+4y=0$ $\qquad x_0=-\frac{a}{2}=1, \quad y_0=-\frac{b}{2}=-2$



* Retta CO: $y=-2x$

* Retta tangente $y=\frac{1}{2}x+n$,
ma dovendo passare per $(0,0)$ è $n=0$

$$y=\frac{1}{2}x$$

Oss. $x^2+y^2-2x+4y=0$

$$x^2-2x+y^2+4y=0$$
$$x^2-2x+1+y^2+4y+4-5=0$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2=5$$

$x_0=1 \qquad y_0=-2 \qquad R=\sqrt{5}$