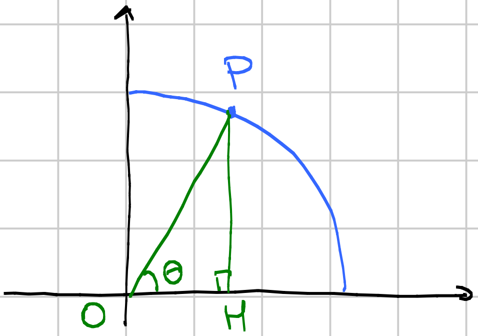
TRIGONOMETRIA 2

Trigonometria e triangoli rettangoli



Ogni triangolo rettangolo è simile ad un triangolo rettangolo "che si forma nella circonferenza trigonometrica".
Triangoli simili = lati in proporzione

$$\frac{OH}{BA} = \frac{PH}{CA} = \frac{OP}{BC}, \text{ cioè } \frac{\cos\theta}{BA} = \frac{\sin\theta}{CA} = \frac{1}{BC}$$

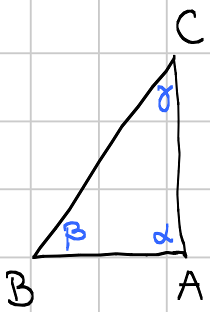
Da qui si ricavano le relazioni trigonometriche nei triangoli rettangoli, cioè

$$\boxed{\begin{aligned} BA &= BC \cdot \cos\theta \\ CA &= BC \cdot \sin\theta \end{aligned}}$$

CATETO = IPOTENUSA · cos (angolo adiac)
CATETO = IPOTENUSA · sin (angolo opposto)

$$\frac{CA}{BA} = \frac{\cancel{BC} \cdot \sin\theta}{\cancel{BC} \cdot \cos\theta} = \tan\theta$$

Esercizi ① Sapendo che $AB = 3$ e $\cos\beta = \frac{2}{5}$, determinare CB



$\alpha = 90°$

Applico

$$AB = BC \cdot \cos\beta$$
$$3 = BC \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

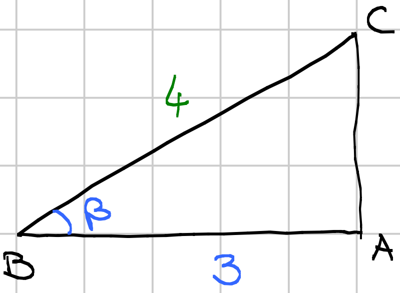
② Sapendo $AB = 3$ e $\cos\beta = \frac{2}{5}$, determinare $\sin\gamma$

Ho che $\gamma = 90° - \beta$, quindi $\sin\gamma = \sin(90° - \beta) = \cos\beta = \frac{2}{5}$

archi associati.

③ Sapendo $AB = 3$ e $\cos\beta = \frac{3}{4}$, determinare AC.

Solita formula:



$BC \cdot \cos\beta = AB$

$BC \cdot \frac{3}{4} = 3 \quad \Rightarrow \quad BC = 4$

$AC^2 = BC^2 - BA^2 = 16 - 9 = 7$

$\Rightarrow AC = \sqrt{7}$

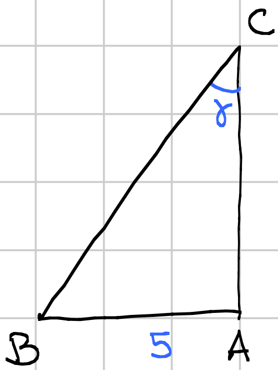
Alternativa: calcolo $\sin\beta$

$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$, quindi $\sin\beta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

Scelgo segno + perché $\beta \in [0, 90°]$, quindi $\sin\beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Formula

$AC = BC \cdot \sin\beta = 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \sqrt{7}$.

④ Sapendo che $AB = 5$ e $\cos\gamma = \frac{3}{7}$, determinare AC.



$AB = BC \cdot \sin\gamma \qquad 5 = BC \cdot \sin\gamma$

$AC = BC \cdot \cos\gamma \qquad AC = BC \cdot \frac{3}{7}$

Serve $\sin\gamma$: $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma =$

$= 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$

Quindi $\sin\gamma = \frac{\sqrt{40}}{7} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ (ho scelto il segno perché ...)

Applico $AB = BC \cdot \sin\gamma$: $\quad 5 = BC \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} \Rightarrow BC = \frac{35}{2\sqrt{10}}$

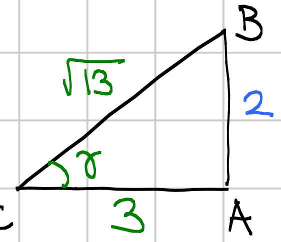
Applico $AC = BC \cdot \cos\gamma = \frac{\overset{5}{\cancel{35}}}{2\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\cancel{7}} = \frac{15}{2\sqrt{10}}$

$\tan\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{2\sqrt{10}}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

$\tan\beta =$ 1° modo $= \frac{AC}{AB}$ e si calcola

2° modo $= \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{1}{\tan\gamma} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$

⑤ $AB = 2$. Area $= 3$. $\cos\gamma = ?$



$$\text{Area} = \frac{AB \cdot AC}{2} \qquad 3 = \frac{\cancel{2} \cdot AC}{\cancel{2}}$$

$AC = 3$

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 = 9 + 4 = 13 \qquad CB = \sqrt{13}$$

↑ Pitagora

Solita formula: $AC = CB \cdot \cos\gamma \Rightarrow 3 = \sqrt{13} \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{13}}$

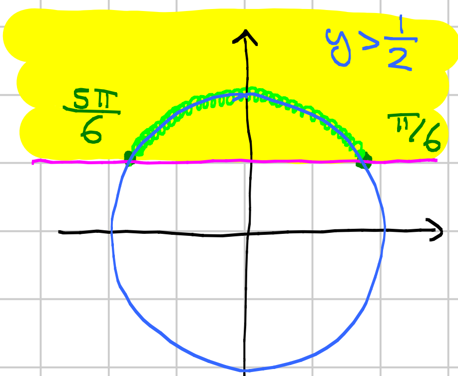
— o — o —

Disequazioni trigonometriche.

Banali: $\sin x \leq 2$ sempre $\qquad \sin x > 4$ $\emptyset$

$\cos x \geq -3$ sempre $\qquad \cos x < -1$ $\emptyset$

Esempio 1 $\sin x \geq \frac{1}{2}$. Guardo il cerchio!

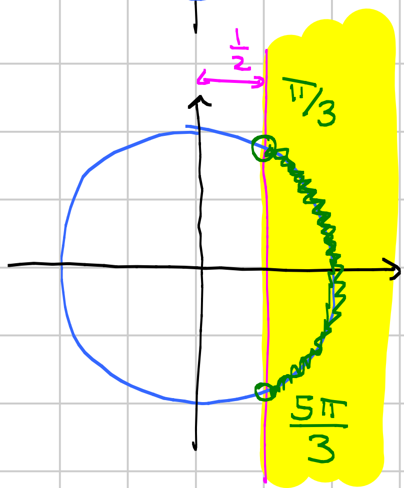


Cerco i punti della circonf. trigo. con coordinata $y \geq \frac{1}{2}$

Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la soluzione è

$[\pi/6, 5\pi/6]$

Esempio 2 $\cos x \geq \frac{1}{2}$



Cerco i punti con coordinata $x \geq \frac{1}{2}$.

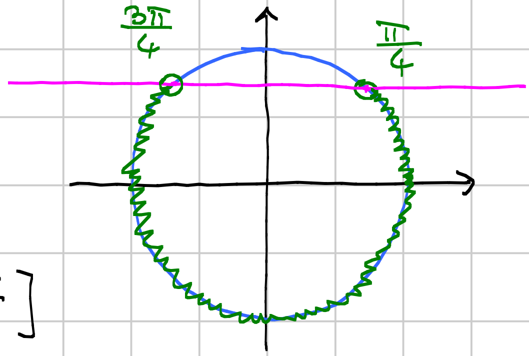
In $[0, 2\pi]$ la soluzione è:

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$$

Non tenendo conto di $[0, 2\pi]$ la soluzione si può scrivere come:

$$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \qquad \text{Descrive lo stesso insieme}$$

Esempio 3 $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$



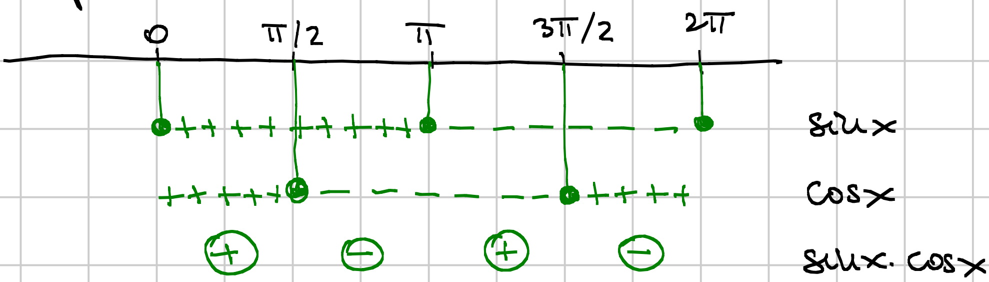
Scritto in $[0, 2\pi]$: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$

Altri 2 modi di scriverlo: $\left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$

$\left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Esempio 4 $\sin(2x) > 0$ $\cancel{2}\sin x \cos x > 0$

Disequazione con un prodotto. Studio $\sin x$ e $\cos x$ separatamente



$\sin(2x) > 0$ dove $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

NI

Altro modo: $\sin(2x) > 0$ $\sin A > 0 \iff 0 < A < \pi$

$\sin(2x) > 0 \rightsquigarrow 0 < 2x < \pi \rightsquigarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$

In questo modo è venuto solo 1 pezzo !!!!

In realtà $\sin A > 0 \iff 0 + 2k\pi < A < \pi + 2k\pi$

$\sin(2x) > 0 \iff 0 + 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi$

$0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

Quali sono i valori di k per cui ottengo soluzioni nel 1° giro?

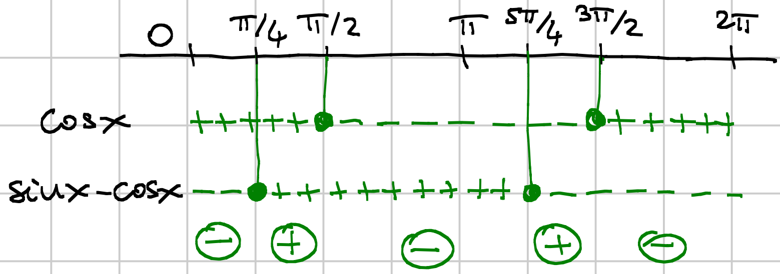
$k = 0 \to 0 < x < \pi/2$ $k = 1 \to \pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e questo è il secondo pezzo

Quando si divide per 2, il secondo giro diventa la seconda parte del 1° giro.

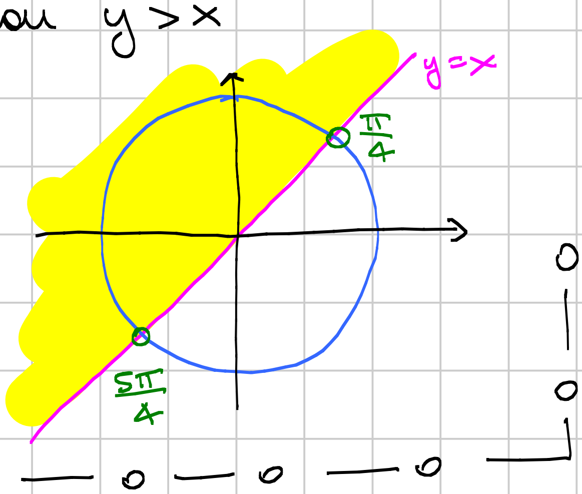
Esempio 5 $\quad 2\sin^2 x + \sin(2x) \le 2$

$$\sin(2x) \le 2 - 2\sin^2 x$$
$$\sin(2x) \le 2(1-\sin^2 x)$$
$$\sin(2x) \le 2\cos^2 x$$
$$\cancel{2}\sin x\cos x \le \cancel{2}\cos^2 x$$
$$\sin x\cos x - \cos^2 x \le 0 \qquad \cos x(\sin x - \cos x) \le 0$$

Devo studiare il segno di $\cos x$ e di $\sin x - \cos x$



Vediamo dove $\sin x - \cos x > 0$, cioè $\sin x > \cos x$.
Sono i punti della circ. trig. con $y > x$



Mi serviva ≤ 0: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$