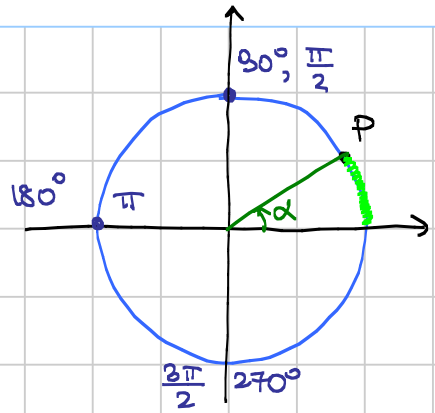
TRIGONOMETRIA

Titolo nota 24/09/2009



Angoli e circonferenza trigonometrica.
Per individuare un p.to si può usare l'angolo α o la lunghezza dell'arco.

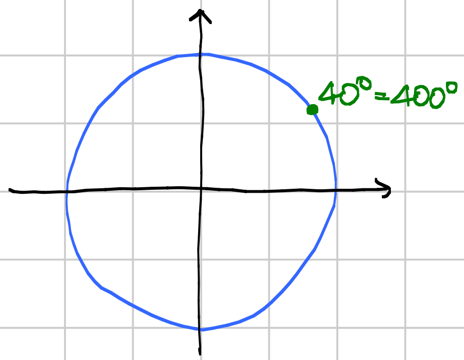
GRADI SESSAGESIMALI : RADIANTI = 360° : 2π

Hanno senso anche misure al di fuori di 0-360° e $[0, 2\pi]$

<u>Esempi</u> 400° individua lo stesso punto dato da 40°, perché

$$\underbrace{400°}_{} = \underbrace{360°}_{\text{un giro}} + \underbrace{40°}_{\text{40° nel 2° giro}}$$

Lo stesso punto lo individuo con $-320°$

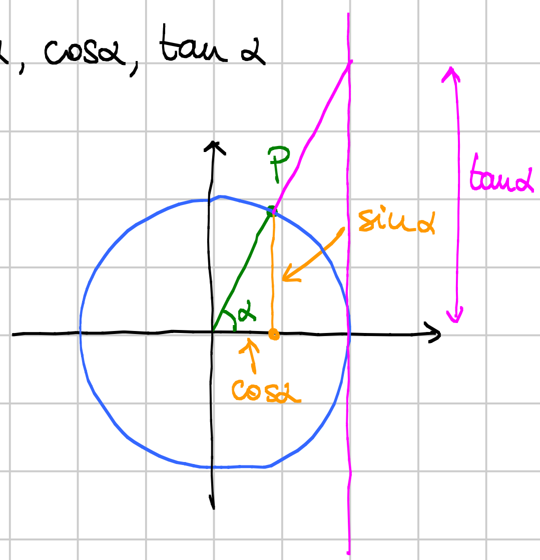


180° stesso p.to di 180°+360° = 540° o di −180°
In radianti : π individua lo stesso punto di $-\pi$ o 3π, o in generale di $\pi + 2k\pi$ con k intero.

— o — o —

<u>Funzioni trigonometriche elementari</u> : $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ definita quando $\cos\alpha \neq 0$

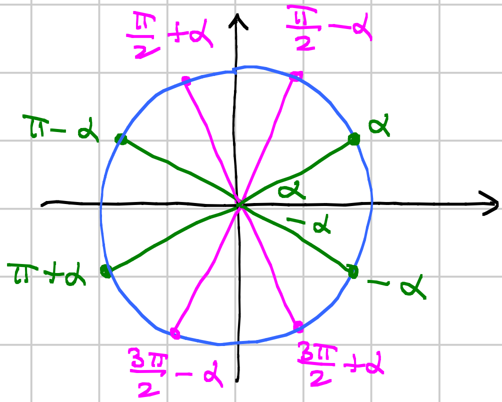


90°	$\frac{\pi}{2}$	$\sin = 1$, $\cos = 0$, $\tan$ Non Def.
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\sin = \frac{1}{2}$, $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan = \frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan = 1$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos = \frac{1}{2}$, $\tan = \sqrt{3}$

Archi associati

Dato α, i suoi archi associati sono

$-\alpha,\ \pi \pm \alpha,\ \frac{\pi}{2} \pm \alpha,\ \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$



$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

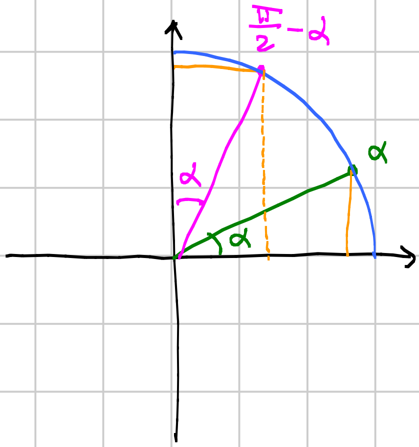
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$



$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}$

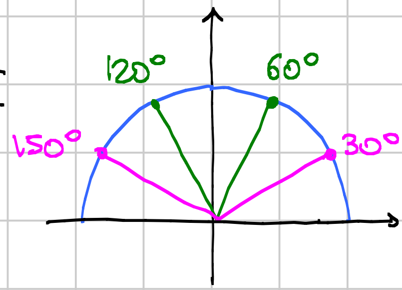
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$

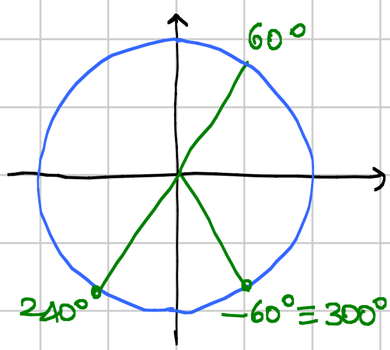
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$

Esempi

$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos = -\frac{1}{2}$
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$\sin = \frac{1}{2}$	$\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$	$\sin = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos = \frac{1}{2}$
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	$\sin = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos = -\frac{1}{2}$





— o —

FORMULE DI ADDIZIONE

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

RELAZIONE FONDAM.

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Esempi 15° $\frac{\pi}{12}$

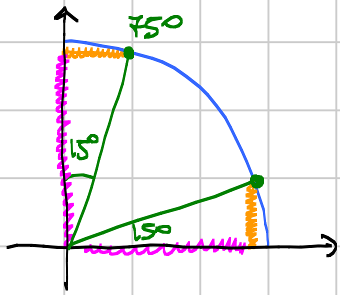
$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Si poteva ottenere la stessa cosa osservando che $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$

$\cos(75^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sin(15^\circ)$ (archi associati)

$\sin(75^\circ) = \cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (archi associati)



Equazioni semplici

① $\sin x = 3$ Nessuna soluzione

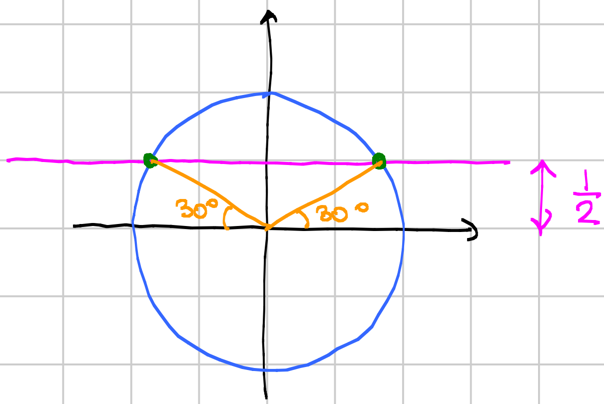
$\sin x = -\sqrt{2}$ Nessuna soluzione

In generale: $\sin x = \lambda$ oppure $\cos x = \lambda$ non hanno soluzioni quando $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

② $\sin x = \frac{1}{2}$ Scritta così le soluzioni sono infinite. Data una soluzione posso aggiungere multipli di 2π

Guardo il cerchio !!

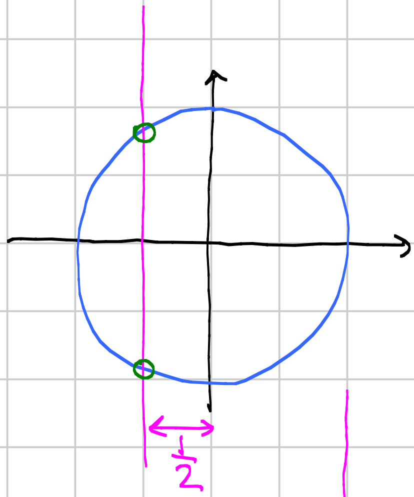
Risolvere $\sin x = \frac{1}{2}$ vuol dire trovare i p.ti della circ. trigonometrica che hanno ordinata (coordinata y) $= \frac{1}{2}$



Tra 0 e 2π, cioè nel primo giro, ci sono 2 soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{6} \quad e \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

③ $\cos x = -\frac{1}{2}$. Cerco i punti della circonferenza con coordinata x uguale a $-\frac{1}{2}$



Tra 0 e 2π ho 2 soluzioni:

$x = \frac{2\pi}{3}$ $x = \frac{4\pi}{3}$

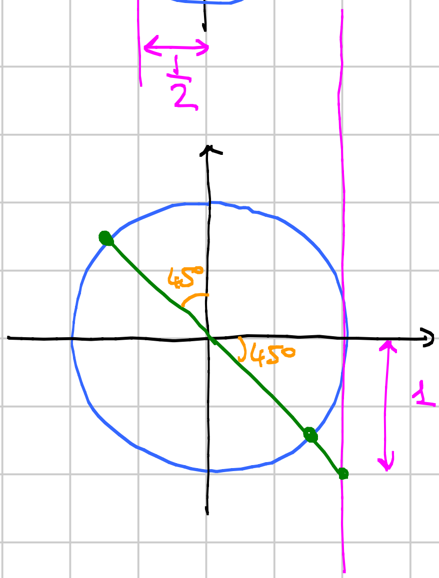
radianti, o più brutalmente p.ti della circ.

④ $\tan x = -1$

In $[0, 2\pi]$ ho 2 soluzioni

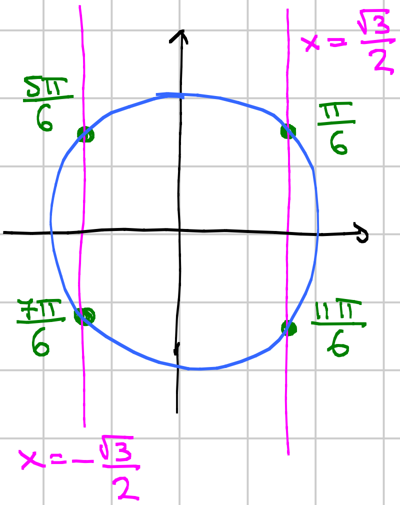
$x = \frac{3\pi}{4}$ (135°)

$x = \frac{7\pi}{4}$ (315°)



Osservazione: $\frac{7\pi}{4}$ rappresenta lo stesso punto di $-\frac{\pi}{4}$.

⑤ $4\cos^2 x = 3$ $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ (sto ponendo $y = \cos x$: $4y^2 = 3$ eq. di 2° grado $y = \pm \sqrt{3}/2$)



Cerco i punti che hanno ascissa $\frac{\sqrt{3}}{2}$ oppure $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ho quindi 4 soluzioni in $[0, 2\pi]$:

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

Esercizio 1 Se $\sin x = \frac{2}{3}$ e $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, quanto vale $\cos x$?

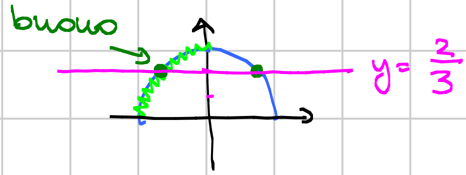
Risposta: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, quindi $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

NO!!! Da $\cos^2 x = \frac{5}{9}$, posso solo dedurre che

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Ora devo scegliere il segno sfruttando che $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Secondo quadrante $\Rightarrow$ segno $\ominus$

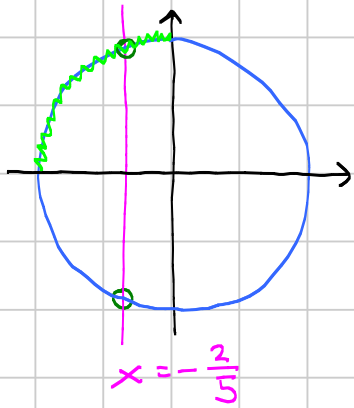
Conclusione: $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$



Esercizio 2 Se $\cos x = -\frac{2}{5}$ e $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, quanto vale $\sin x$?

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$ $\quad \sin x = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$

Devo scegliere il segno. Se $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, il segno è quello positivo.



Esercizio 3 $\tan x + \sin(2x) = 0$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x \left(\frac{1}{\cos x} + 2\cos x \right) = 0 \qquad \sin x \, \frac{1 + 2\cos^2 x}{\cos x} = 0$$

Deve annullarsi uno dei 2 fattori al numeratore (ed essere il denominatore $\neq 0$)

$\sin x = 0$ $\quad$ In $[0, 2\pi]$ le soluzioni sono $x = 0, \pi, 2\pi$

$1 + 2\cos^2 x = 0$ $\quad$ Nessuna soluzione perché

$$1 + 2\cos^2 x \geq 1$$

(Volendo si può porre $y = \cos x$ e ottenere $1 + 2y^2 = 0$ che è un'eq. di 2° grado senza soluzioni)