# RADICI E VALORI ASSOLUTI



$\sqrt{f(x)}$ Burocrazia: $f(x) \geq 0$

Stesso discorso per tutte le radici di indice pari: $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$, ...

Per le radici di indice dispari non c'è burocrazia.

## Equazioni con radici di indice pari

- FORMA SEMPLICE $\sqrt{f(x)} = A$ Numero
  - se $A < 0$ non ci sono soluzioni, perché $\sqrt{f(x)}$, quando esiste, è una quantità $\geq 0$.
  - se $A \geq 0$ posso fare i quadrati e risolvere $f(x) = A^2$

- FORMA GENERALE: $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

  Metodo "rapido": si fanno i quadrati, si risolve $f(x) = g^2(x)$, e si VERIFICANO le soluzioni ottenute sostituendo nell'equazione ORIGINARIA.

**Esempio 1**

$\sqrt{x+3} = 5$ $\quad x+3 = 25 \quad x = 22$

$\sqrt{x+3} = -5$ $\quad -5$ è negativo $\Rightarrow$ nessuna soluzione

$\sqrt{x+3} = 0$ $\quad x+3 = 0 \quad x = -3$

$\sqrt[4]{2-x} = 3$ $\quad$ elevo alla quarta: $2-x = 3^4 = 81$

$2-x = 81 \quad x = -79$

$\sqrt[4]{2-x} = -3$ $\quad$ Negativo $\Rightarrow$ nessuna soluzione

$\sqrt[3]{x+3} = 2$ $\quad$ elevo al cubo: $x+3 = 8 \quad x = 5$

$\sqrt[3]{x+3} = -2$ $\quad$ Nessun problema ad elevare al cubo, perché l'indice è dispari

$x+3 = (-2)^3 = -8 \quad x = -11$

$\sqrt[40]{x-7} = -2$ $\quad$ Nessuna soluzione

$\sqrt[39]{x-7} = -1$ $\quad$ Indice dispari: elevo alla 39

$x-7 = (-1)^{39} = -1, \quad x-7 = -1 \Rightarrow x = 6.$

**Esempio 2** $\sqrt{x+2} = x$ Elevo al quadrato

$x+2 = x^2$, $x^2-x-2=0$, $(x-2)(x+1)=0$

$x = \begin{cases} \boxed{2} & \text{ok} \\ \boxed{-1} & \text{ABUSIVA} \end{cases}$

$\boxed{2} \to$ sostituisco $x=2$: $\sqrt{4} = 2$ ok

$\boxed{-1} \to$ sostituisco $x=-1$: $\sqrt{1} = -1$ NO

**Esempio 3** $\sqrt{2x+3} = -x$ Elevo al quadrato

$2x+3 = x^2$, $x^2-2x-3=0$, $(x-3)(x+1)=0$

$x = \begin{cases} 3 \rightsquigarrow \sqrt{9} = -3 & \text{NO} \quad \text{ABUSIVA} \\ -1 \rightsquigarrow \sqrt{1} = -(-1) & \text{ok} \end{cases}$

Soluzione: $x=-1$

**Esempio 4** $\sqrt{x} = \sqrt{3x+1}$ Elevo: $x = 3x+1$, $2x=-1$

$x = -\frac{1}{2}$

Verifica:

$\sqrt{-\frac{1}{2}} = \sqrt{-\frac{1}{2}}$ No: le radici non hanno senso

**Esempio 5** $\sqrt{x} = \sqrt{6x-5}$ Elevo: $x = 6x-5$, $5x=5$, $x=1$

Verifica: $\sqrt{1} = \sqrt{1}$ : ok, soluzione: $x=1$.

— o — o —

## Disequazioni con radici (caso semplice)

$\sqrt{f(x)} > A$

- se $A<0$, la disequazione è sempre vera, purché $f(x) \geq 0$ (burocrazia)

- se $A \geq 0$ posso elevare, ma devo imporre $f(x) \geq 0$

$$\begin{cases} \boxed{f(x) \geq 0} \\ f(x) > A^2 \end{cases}$$

INUTILE, perché segue dalla seconda

È come fare impunemente il quadrato

$\sqrt{f(x)} < A$

- se $A<0$, dovrebbe essere $\sqrt{f(x)} < 0$, il che è impossibile

  Soluzione: $\emptyset$

- se $A \geq 0$ posso elevare, ma devo imporre $f(x) \geq 0$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < A^2 \end{cases}$$

SISTEMA VERO (servono tutte e 2)

Esempio 1 $\quad \sqrt{x+1} > -2$ $\quad$ Sempre purché la burocrazia sia Ok:
$x+1 \geq 0$, quindi $x \geq -1$.

$\sqrt{x+1} > 2$ $\quad$ Faccio il quadrato: $x+1 > 4$
(la burocrazia segue banalmente): $x > 3$

$\sqrt{x+2} < -3$ $\quad$ MAI: $\emptyset$

$\sqrt{x+2} < 3$ $\quad$ Elevo al quadrato e impongo burocrazia $\begin{cases} x+2 < 9 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$

$x < 7$

$x \geq -2$ $\qquad -2 \leq x < 7$

Esempio 2 $\quad \sqrt{x^2+9} > 5$ $\quad$ Elevo al quadrato $\quad x^2+9 > 25$
Burocrazia non serve $\quad x^2 > 16$

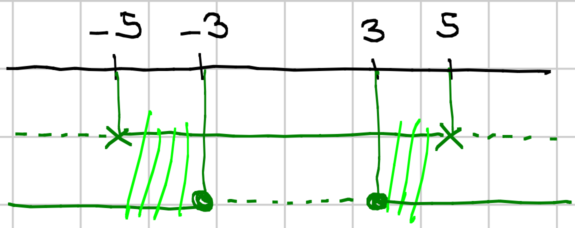
$x^2-16 > 0$ valori esterni: $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

corrette dopo VIDEO

$\sqrt{x^2+9} > -5$ $\quad$ Sempre purché burocrazia Ok: $x^2+9 \geq 0$ sempre!

$\sqrt{x^2-9} < 4$ $\qquad \begin{cases} x^2-9 < 16 & \text{Elevare al quadrato} \\ x^2-9 \geq 0 & \text{Burocrazia} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 < 25 & \text{Valori interni} \\ x^2 \geq 9 & \text{Valori esterni} \end{cases}$




Zona comune: $(-5, -3] \cup [3, 5)$

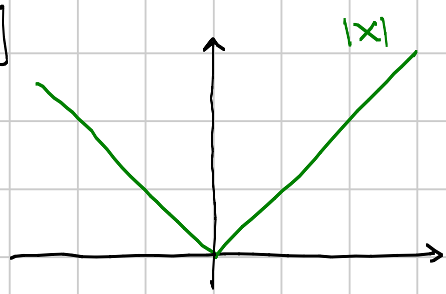
Esempio 3 $\quad \sqrt[3]{x+3} \leq -2$

Elevo impunemente al cubo: $\quad x+3 \leq (-2)^3$, $\quad x+3 \leq -8$

$x \leq -11$

# VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$




$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x-4 \geq 0, \text{ cioè se } x \geq 4 \\ -x+4 & \text{se } x-4 < 0, \text{ cioè se } x < 4 \end{cases}$$

## $\boxed{\text{Equazioni con valori assoluti}}$

Caso semplice: $|f(x)| = A$ ← Numero

- se $A < 0$ l'equazione non ha soluzioni
- se $A = 0$ l'equazione si riduce a $f(x) = 0$
- se $A > 0$ l'equazione si riduce all'unione delle soluzioni delle 2 equazioni
  $\longrightarrow f(x) = A$
  $\longrightarrow f(x) = -A$

**Esempio 1**

$|3x+2| = -7$ Nessuna soluzione

$|3x+2| = 0 \iff 3x+2 = 0 \iff x = -2/3$

$|3x+2| = 7$ Diventa l'unione delle soluzioni di

$3x+2 = 7, \quad 3x = 5, \quad x = 5/3$

$3x+2 = -7, \quad 3x = -9, \quad x = -3$

**Esempio 2**

$|x^2-3| = -4$ Nessuna soluzione

$|x^2-3| = 0 \qquad x^2-3 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{3}$

$|x^2-3| = 4$ Devo risolvere 2 equazioni

$$\left.\begin{array}{lll} x^2-3 = 4 & x^2 = 7 & x = \pm\sqrt{7} \\ x^2-3 = -4 & x^2 = -1 & \text{NULLA} \end{array}\right\} \text{2 soluzioni}$$

# Disequazioni caso semplice

$|f(x)| < A$

- se $A<0$ MAI: $\emptyset$
- se $A=0$ MAI: $\emptyset$
- se $A>0$ è equivalente al sistema
$$\begin{cases} f(x) < 5 \\ f(x) > -5 \end{cases}$$

$|f(x)| > A$

- se $A<0$ sempre, purchè $f(x)$ abbia senso
- se $A=0$ vera quando $f(x) \neq 0$ (e ovviamente $f(x)$ ben definito)
- se $A>0$ "valori esterni" è equivalente a fare l'unione di $f(x) < -5$ e $f(x) > 5$

**Esempi**

$|3x+1| < -2$ MAI: $\emptyset$

$|3x+1| > -2$ Sempre: $\mathbb{R}$

$|3x+1| \leq 0$ solo quando $3x+1=0$, cioè $x=-1/3$

$|3x+1| \geq 0$ Sempre: $\mathbb{R}$

$|3x+1| > 0$ sempre, tranne quando si annulla $x \neq -1/3$

$|3x+1| < 8$ "valori interni" $\begin{cases} 3x+1<8 \\ 3x+1>-8 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x<7 \\ 3x>-9 \end{cases}$ $\begin{cases} x<7/3 \\ x>-3 \end{cases}$

$(-3, 7/3)$

$|3x+1| > 10$ "valori esterni" $3x+1>10$ $3x>9$ $x>3$

$3x+1<-10$ $3x<-11$ $x<-11/3$

Unione: $(-\infty, -11/3) \cup (3, +\infty)$

— o —

**Esempio** $|x^2-2| > 1$ "Valori esterni"

$x^2-2>1$
$x^2-2<-1$ e poi prendo l'unione

$x^2-2>1$, $x^2>3$, $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$x^2-2<-1$, $x^2<1$, $(-1, 1)$


Soluzione finale:
$(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$