PRECORSO 2009 1.2

Titolo nota 21/09/2009

Esercizi su logaritmi e potenze

① $\log_2 16 = 4$ (volendo: $\log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4\cdot 1 = 4$)

② $\log_2 a = 3$ $\qquad \log_2 a = 3\cdot\underbrace{\log_2 2}_{1} = \log_2 2^3$, $\log_2 a = \log_2 2^3$

$a = 2^3 = 8$

③ $\log_2(8\cdot 16\cdot 64) =$ 1° modo $[\log_a(A\cdot B) = \log_a A + \log_a B]$

$= \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 64 = 3+4+6 = 13$

2° modo: uso proprietà potenze:

$\log_2(8\cdot 16\cdot 64) = \log_2(2^3\cdot 2^4\cdot 2^6) = \log_2 2^{13} = 13$

④ $\log_3 20 + \log_3 4 = \log_3(20\cdot 4) = \log_3 80$

$\log_3 20 - \log_3 4 = \log_3(20:4) = \log_3 5$

$[\log_a(A:B) = \log_a A - \log_a B]$

⑤ $\log_2 4\cdot\log_2 8 = \log_2 a$ $\qquad [\log_a A\cdot\log_a B$ = NULLA DI FURBO$]$

$\log_2 4\cdot\log_2 8 = 2\cdot 3 = 6$ Devo risolvere $6 = \log_2 a$, $a = 2^6 = 64$

$\log_2 a = 6 = 6\,\underbrace{\log_2 2}_{1} = \log_2 2^6$ $\qquad a = 2^6$

⑥ $2^{\log_2 a} = 9 \Rightarrow a = 9$. Se uno non lo vede: pongo $y = \log_2 a$

$2^y = 9 \Rightarrow y = \log_2 9$. Torno nella variabile a!

$\log_2 a = \log_2 9 \Rightarrow a = 9$

(7) $\log_2(2^a) = 9 \qquad a \cdot \underbrace{\log_2 2}_{1} = 9 \quad \Rightarrow a = 9$

(8) $\log_2(\log_3 a) = 2$ Pongo $y = \log_3 a$

$\log_2 y = 2, \quad y = 4$ Tornando in a: $\log_3 a = 4 \Rightarrow a = 3^4 = 81$

$[\log_3 a = 4 = 4\log_3 3 = \log_3 3^4]$

(9) Cambio di base: $\left[\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a} \right.$ FORMULA DI CAMBIO DI BASE $\left. \right]$

$\log_a c = x$, cioè $a^x = c$. Risolvo prendendo a dx e sx i log in base b:

$\log_b(a^x) = \log_b c, \quad x \log_b a = \log_b c, \quad x = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$

Idea fondamentale: risolvere $a^x = c$ prima "in base a" poi "in base b"

—o—o—

(10) $\log_3 9 = \log_2 a \qquad 2 = \log_2 a \quad \Rightarrow a = 4$

$\log_3 9 = \log_a 25 \qquad 2 = \log_a 25$

Passo dalla base a alla base 5

$$\log_a 25 = \frac{\log_5 25}{\log_5 a} = \frac{2}{\log_5 a} = 2 \Rightarrow \log_5 a = 1 \Rightarrow a = 5$$

(11) $\log_{125} 64 = \log_5 a$ Passo il primo log in base 5

$$\log_{125} 64 = \frac{\log_5 64}{\log_5 125} = \frac{\log_5 64}{3} = \frac{1}{3}\log_5 64 = \log_5 64^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_5 2^{6 \cdot \frac{1}{3}} = \log_5 4 \quad \Rightarrow a = 4$$

(12) $\log_7 2^{1000} = \log_{49} 2^a$

$$\log_{49}(2^a) = \frac{\log_7(2^a)}{\log_7 49} = \frac{1}{2}\log_7(2^a) = \log_7 2^{\frac{a}{2}}$$

$$2^{1000} = 2^{a/2} \Rightarrow a/2 = 1000 \Rightarrow a = 2000$$

(13) $\log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 a$. Porto tutto in base 2:

$$\log_7 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 7} \quad ; \quad \log_8 49 = \frac{\log_2 49}{\log_2 8} = \frac{1}{3}\log_2 49 = \frac{2}{3}\log_2 7$$

Moltiplico: $\log_7 3 \cdot \log_8 49 = \frac{\log_2 3}{\cancel{\log_2 7}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cancel{\log_2 7} = \frac{2}{3}\log_2 3$

Voglio: $\boxed{\frac{2}{3}}\log_2 3 = \log_2 a$; $\log_2 3^{2/3} = \log_2 a$; $a = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$

— o — o —

EQUAZIONI

(1) $\log_2(5x+3) = 3$; $\log_2(5x+3) = \log_2 8$

$5x+3 = 8 \Rightarrow x = 1$

(2) $\cancel{\log_2}(5x+3) = \cancel{\log_2}(1-x) \Rightarrow 5x+3 = 1-x \Rightarrow 6x = -2$

$\Rightarrow \boxed{x = -1/3 \Rightarrow 1 \text{ soluzione}}$ SI

(3) $\cancel{\log_2}(2x+1) = \cancel{\log_2}(3x+2) \Rightarrow 2x+1 = 3x+2$

$\Rightarrow \boxed{x = -1 \Rightarrow 1 \text{ soluzione}}$

ASSOLUTAMENTE NO

BISOGNA SEMPRE VERIFICARE CHE L'ARGOMENTO DEL log SIA >0

[$\cancel{\log_a} f(x) = \cancel{\log_a} g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ ok, ma bisogna POI controllare che nei valori trovati di x si abbia $f(x) > 0$ dunque anche $g(x) > 0$]

[Caso particolare: $\log_a f(x) = \log_a A$, se $A > 0$ non serve controllo]

④ $\cancel{\log}_5 (x^2+9) = 2 = \cancel{\log}_5 25$ $\qquad x^2+9=25,\ x^2=16,\ x=\pm 4$

⑤ $\cancel{\log}_5 (x^2+5) = \cancel{\log}_5 (4x)$ $\qquad x^2+5=4x$

$x^2-4x+5=0$

$x = 2 \pm \sqrt{4-5}$ $\Rightarrow$ NULLA (nessuna radice reale per colpa dell' eq. di 2° grado)

⑥ $\cancel{\log}_5 (x^2-5) = \cancel{\log}_5 (4x)$ $\qquad x^2-5=4x,\quad x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0 \qquad x = \begin{cases} 5 \rightarrow \text{ok} & \log_5 20 = \log_5 20 \\ -1 \rightarrow \text{NO} & \log_5(-4) = \log_5(-4) \end{cases}$

L'unica soluzione dell'equazione è $x=5$.

⑦ $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$; $\log_2[(x-1)(x+1)] = 3$

$\cancel{\log}_2(x^2-1) = 3 = \cancel{\log}_2 8 \qquad x^2-1=8,\quad x^2=9,\ x=\pm 3$

Il controllo va fatto nell'eq. iniziale!!!

Controllo $x=3$: $\log_2 2 + \log_2 4 = 1+2=3$ ok!

Controllo $x=-3$ $\log_2(-4) + \log_2(-2)$ NON HA SENSO

Quindi: UNICA SOLUZIONE $x=3$.

⑧ $3\log_3 x + 2\log_3 x^2 = 21$; $3\log_3 x + 4\log_3 x = 21$; $7\log_3 x = 21$

$\log_3 x = 3,\quad x=27$

⑨ $(\log_2(x+2))^2 + 3\log_2(x+2) = 4$. Pongo $y=\log_2(x+2)$;

$y^2+3y=4$; $y^2+3y-4=0$; $(y+4)(y-1)=0$

$y = \begin{cases} -4 \rightsquigarrow \log_2(x+2) = -4 = \log_2 \frac{1}{16} \rightsquigarrow x+2 = \frac{1}{16} \rightsquigarrow x = -\frac{31}{16} \\ 1 \rightsquigarrow \log_2(x+2) = 1 = \log_2 2 \rightsquigarrow x+2=2 \rightsquigarrow x=0 \end{cases}$

(10) $\log_3(2x+5) = -3$

$$-3 = -3\underbrace{\log_3 3}_{1} = \log_3 3^{-3} = \log_3 \frac{1}{27}$$

$$\cancel{\log_3}(2x+5) = \cancel{\log_3}\frac{1}{27} \Rightarrow 2x+5 = \frac{1}{27} \Rightarrow \text{si risolve.}$$

(11) $9^x - 5\cdot 3^x = 6$; $3^{2x} - 5\cdot 3^x = 6$; Pongo $y = 3^x$;

$y^2 - 5y - 6 = 0$; $(y-6)(y+1) = 0$

$$y = \begin{cases} 6 \rightsquigarrow 3^x = 6 \rightsquigarrow x = \log_3 6 = 1 + \log_3 2 \\ -1 \rightsquigarrow 3^x = -1 \rightsquigarrow \text{NULLA} \end{cases}$$

↳ $\log_3(3\cdot 2) = \log_3 3 + \log_3 2$

(12) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ Voglio fattorizzare

Pongo $y = x^2$: $y^2 - 3y - 4 = (y-4)(y+1)$ (Radici: $4, -1$)

Torno in x:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2-4)(x^2+1) = \underbrace{(x+2)}_{-2}\underbrace{(x-2)}_{2}\underbrace{(x^2+1)}_{\text{NULLA}}$$

Avere la fattorizzazione = avere le radici

—o—o—

(13) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ Voglio fattorizzare. Pongo $y = x^2$

$y^2 - 5y + 6$ (Radici: 3 e 2)

$= (y-3)(y-2)$

Torno in x:

$$x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2-3)(x^2-2) = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

Radici dell'eq. iniziale: $x = \pm\sqrt{3}$, $x = \pm\sqrt{2}$

(14) $\underbrace{(x^2+2)}_{\text{NULLA}}(x^3+3)\underbrace{(x^4+4)}_{\text{NULLA}} = 0$

$x^3 = -3$

$x = -\sqrt[3]{3}$

Una soluzione

$(x^2-2)(x^3-3)(x^4-4) = 0$

$x^2 - 2 = 0 \rightsquigarrow x^2 = 2 \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{2}$

$x^3 - 3 = 0 \rightsquigarrow x^3 = 3 \rightsquigarrow x = \sqrt[3]{3}$

$(x^4 - 4) = 0$

$\underbrace{(x^2+2)}_{\text{NULLA}}\underbrace{(x^2-2)}_{x = \pm\sqrt{2}} = 0$

Tre soluzioni: $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \sqrt[3]{3}$