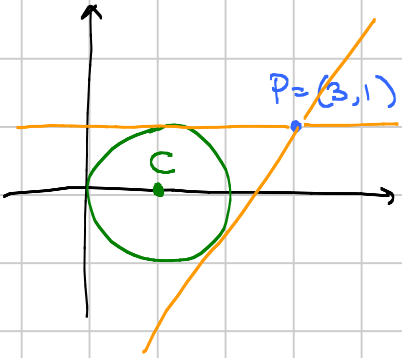
GEOM. ANALITICA E INSIEMI DEL PIANO

Titolo nota 25/09/2008



$$\begin{cases} y-1 = m(x-3) & \text{generica retta per } P \\ (x-1)^2+y^2=1 & \text{Eq. circ.} \end{cases}$$

Sostituisco y nella 2ª eq.

Ottengo una eq. di 2° grado in x

Impongo $\Delta = 0$ e trovo i possibili valori di m

2° metodo Le rette tangenti sono le uniche rette r tali che

$$\text{dist}(C, r) = \text{raggio} = 1$$

La generica retta per P ha equazione $y - m(x-3) - 1 = 0$ (r)

$y - mx + (3m-1) = 0$

$$\text{dist}(C,r) = \frac{|0 - m(1-3) - 1|}{\sqrt{1^2+m^2}} = 1, \text{ cioè } \frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = 1,$$

$|2m-1| = \sqrt{m^2+1}$ Faccio il quadrato a dx e sx

$(2m-1)^2 = m^2+1$, cioè $4m^2 - 4m + \cancel{1} = m^2 + \cancel{1}$,

$3m^2 - 4m = 0$ $\quad m(3m-4) = 0$ $\quad \nearrow m = 0$, $\searrow m = \frac{4}{3}$

— o — o —

Es 1 Retta $ax + 3y + 2 = 0$ passa per $(1,1)$.

Sostituisco $(1,1)$ nell'eq: $a + 3 + 2 = 0 \Rightarrow a = -5$

Es. 2 Stessa retta parallela alla retta $y = 2x$.

Impongo stesso coeff. ang. $\quad 3y = -ax - 2$; $y = \boxed{-\frac{a}{3}}x - \frac{2}{3}$

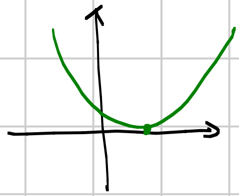
$-\frac{a}{3} = 2 \Rightarrow a = -6$

Es. 3 Stessa retta $\perp$ alla retta $y = 2x$. Impongo coeff. ang. $= -\frac{1}{2}$

$-\frac{a}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Es. 4 Parabola $y = ax^2 + ax + 1$ tangente all'asse x

Impongo che l'eq. $ax^2 + ax + 1 = 0$ abbia una sola soluz, cioè $\Delta = 0$



$\Delta = a^2 - 4a = 0$, $a(a-4) = 0$

$a = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{in questo caso però non è una parabola} \\ 4 \rightarrow \text{SOLUZIONE BUONA} \end{cases}$

Nel caso $a = 4$, qual è il p.to di tangenza? Devo risolvere

$4x^2 + 4x + 1 = 0$, $(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1/2$

Es. 5 Parabola $y = ax^2 + ax + 1$ tangente a

L'eq. della brs. è $y = -x$

$\begin{cases} y = -x \\ y = ax^2 + ax + 1 \end{cases}$; $-x = ax^2 + ax + 1$; $ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 - 4a = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$

Es. 6 Retta $ax + 3y + 2$ tangente alla parabola $y = x^2 - 10$

Metto a sistema

$\begin{cases} y = -\frac{a}{3}x - \frac{2}{3} \\ y = x^2 - 10 \end{cases}$ $\quad -\frac{a}{3}x - \frac{2}{3} = x^2 - 10 \quad \frac{2}{3} - 10 = \frac{2-30}{3}$

$x^2 + \frac{a}{3}x - \frac{28}{3} = 0 \quad 3x^2 + ax - 28 = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 + 28 \cdot 12 = 0 \Rightarrow$ Non ci sono soluzioni

Es. 7 La retta $ax + 3y + 2 = 0$ tangente alla circ. $5x^2 + 5y^2 = 2a$

1° modo: metto a sistema, sostituisco y (o x) e impongo $\Delta = 0$

2° modo: distanza del centro dalla retta = raggio circ.

$x^2 + y^2 = \frac{2a}{5}$ $\quad x_0 = 0, y_0 = 0 \Rightarrow$ centro $= (0, 0)$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad R^2 = \frac{2a}{5} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2a}{5}}$ (serve $a > 0$)

Distanza $(C, \text{retta}) = \frac{|a \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{a^2 + 9}} = \text{raggio} = \sqrt{\frac{2a}{5}}$. Faccio i quadr.

$\frac{4}{a^2 + 9} = \frac{2a}{5} \Leftrightarrow 20 = 2a^3 + 18a \Leftrightarrow a^3 + 9a - 10 = 0$

Devo risolvere l'eq. di 3° grado $a^3+9a-10=0$. Si spera che ci sia una radice razionale (tentativi da fare: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$)

$a=1$ va bene $\Rightarrow$ posso dividere per $a-1$

$$\begin{array}{rrrr|l} a^3 & & +9a & -10 & a-1 \\ -a^3 & +a^2 & & & \overline{a^2+a+10} \\ \hline // & a^2 & +9a & -10 & \\ & -a^2 & +a & & \\ \hline & & 10a & -10 & \\ & & -10a & +10 & \\ \hline & & // & // & \end{array}$$

$a^3+9a-10 = (a-1)(a^2+a+10)$ Soluzioni: $\boxed{a=1}$, più le soluzioni di $a^2+a+10=0$ $\Delta = 1-40<0 \Rightarrow$ Nessun'altra soluzione.

— o — o —

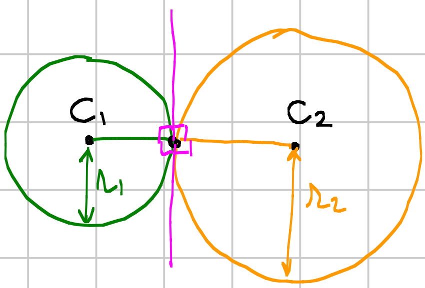
<u>Es. 8</u> Circonf. $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2-2x-a=0$ sono tangenti

<u>1° modo</u> Metto a sistema e impongo soluz. unica

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-2x-a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2=1-x^2 \\ \cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}-2x-a=0 \end{cases}$$ sostituisco nella 2ª

$2x = 1-a$

<u>2° modo</u>



Dist $(C_1, C_2) = r_1+r_2$

Funziona solo se le 2 circ. sono tang. esternamente

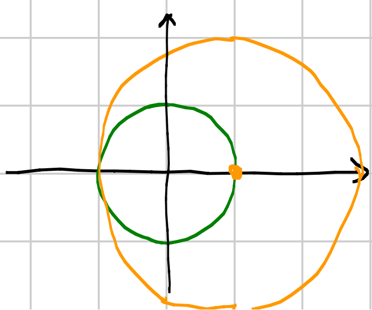
$x^2+y^2=1 \to$ centro $(0,0)$ e raggio 1

$x^2+y^2-2x-a=0 \to x^2-2x\boxed{+1}+y^2-a=\boxed{1} \to (x-1)^2+y^2=a+1$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$x_0=1$, $y_0=0$, $R=\sqrt{a+1} \to$ centro $(1,0)$ e raggio $\sqrt{a+1}$

Le 2 circonferenze sono tangenti se e solo se il raggio della seconda è 2, cioè se $\sqrt{a+1}=2 \Rightarrow a+1=4 \Rightarrow a=3$



Cosa non andava nel 1° modo?

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2-2x-a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2=1-x^2 \\ \cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}-2x-a=0 \end{cases}$$ sostituisco nella 2ª

$2x = 1-a$ → Fin qui ho trovato che esiste un unico valore della x. Quali sono i valori di y corrispondenti?

Riuso la 1ª eq.

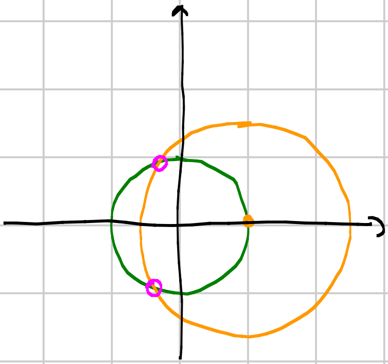
$x^2+y^2=1$ sost. $x=\frac{1-a}{2}$ $\quad \left(\frac{1-a}{2}\right)^2+y^2=1$ cioè

$y^2=1-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2$ Questa ha soluz. unica $\Leftrightarrow$ il termine a dx è $=0$

$$1-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1-a}{2}\right)^2=1 \longrightarrow \frac{1-a}{2}=1 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$\searrow \frac{1-a}{2}=-1 \Rightarrow \boxed{a=3}$$ TROVATO PRIMA

Perché $a=-1$ non è accettabile? Perché il raggio sarebbe $\sqrt{a+1}=0$



Per valori abbastanza piccoli del raggio (dunque di a) le 2 circonferenze si intersecano in 2 p.ti che hanno la stessa x (e per questo x era univoc. det.) e le 2 y una opposta dell'altra (che derivava dall'imporre $y^2=\dots$)

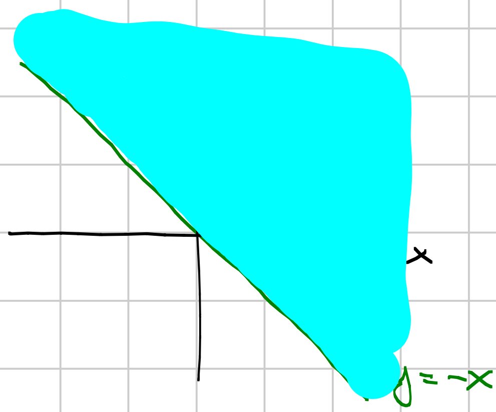
— o — o —

INSIEMI DEL PIANO

Es. 1 Disegnare l'insieme dei punti (x,y) del piano t.c. $x+y\geq 0$

Più precisamente

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geq 0\}$$

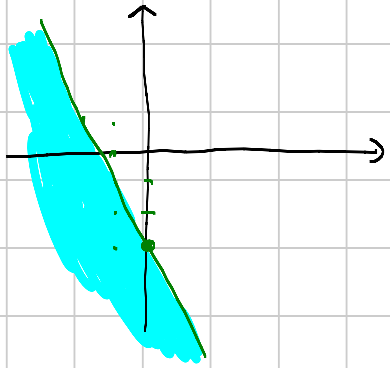


$x+y\geq 0$ vuol dire

$y\geq -x$ "sopra la retta $y=-x$"

Es.2 Insieme $2x+y+3 \le 0$; $y \le -2x-3$

"sotto la retta $y = -2x-3$"



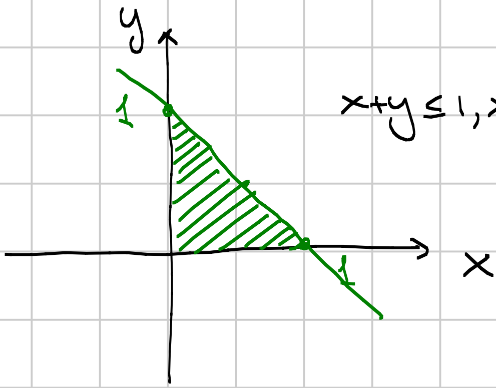
Es.3 $x+y \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

Sono date 3 condizioni che devono essere vere contemporaneamente

$x \ge 0$: 1° e 4° quadrante

$y \ge 0$: 1° e 2° quadrante

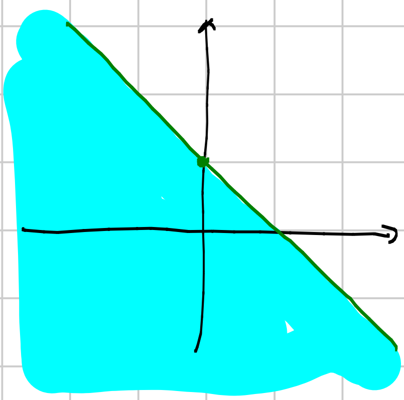
$x \ge 0, y \ge 0$: solo 1° quadrante



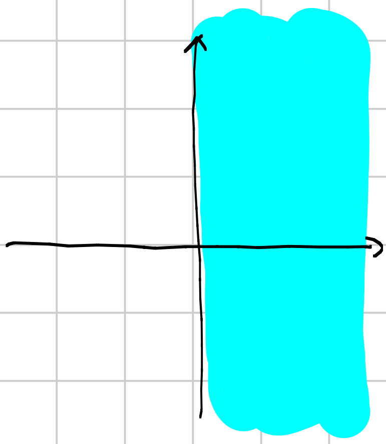
$x+y \le 1, x \ge 0, y \ge 0$

$x+y \le 1 \iff y \le 1-x$

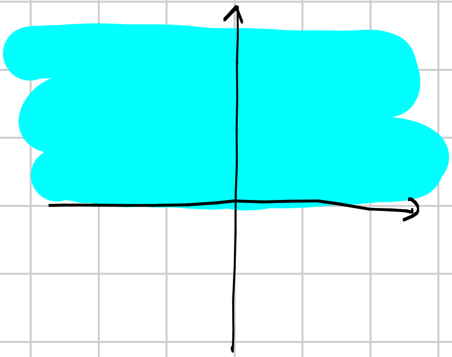
"sotto la retta $y = 1-x$"



$x+y \le 1$



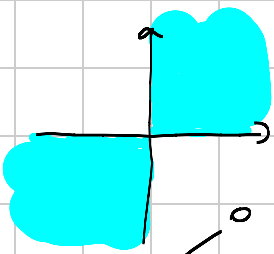
$x \ge 0$



$y \ge 0$

Es.4 $xy \ge 0$ → x e y entrambi positivi → 1° quadrante

↘ x e y entrambi negativi → 3° quadrante



Es.5 Determinare i p.ti (x,y) del piano t.c.

$x^2 - x \ge 0$ $\quad x(x-1) \ge 0$

VALORI ESTERNI: $x \le 0$, $x \ge 1$

Tutti i p.ti con $x \le 0$ sono ok

" " " " $x \ge 1$ sono ok

INDIPENDENTEMENTE DAL VALORE DI y