GEOMETRIA ANALITICA 2

Titolo nota 24/09/2008

FORMULA DELLA RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI

Siano $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$. La retta sarà $y = mx + n$

$$\begin{cases} y_1 = m x_1 + n \\ y_2 = m x_2 + n \end{cases}$$

Passare per P_1
Passare per P_2

Risolvo il sistema nelle incognite m ed n

1ª eq. − 2ª eq.: $\quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) \Rightarrow m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

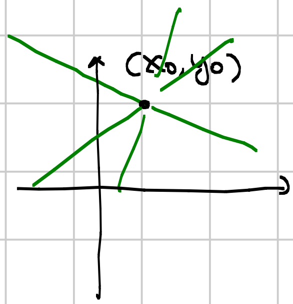
Per trovare n uso 1ª eq: $\quad n = y_1 - m x_1 = y_1 - \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$

Quindi $y = mx + n$ diventa $\quad y = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + y_1 - \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$

Faccio un po' di algebra $\quad y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ e dividendo

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

— o — o —



FASCIO DI RETTE PER UN PUNTO $\quad P = (x_0, y_0)$

Saranno rette del tipo $y = mx + n$. Impongo di passare per P: $\quad y_0 = m x_0 + n \Rightarrow n = y_0 - m x_0$

Quindi $\quad y = mx + y_0 - m x_0$, che equivale a

$$y - y_0 = mx - m x_0$$

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

al variare di m descrive tutte le rette (non verticali) passanti per (x_0, y_0)

EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Dati: centro $P=(x_0, y_0)$, Raggio $R>0$

Circonferenza con centro P e raggio R = insieme dei p.ti (x,y) del piano la cui distanza da P è $=R$.

$$\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}_{\text{Distanza di }(x,y)\text{ da }(x_0,y_0)} = \underbrace{R}_{\text{Raggio}}$$

Facendo il quadrato:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2}$$

$$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2=R^2$$

$$x^2+y^2 \underbrace{-2x_0}_{a}x \underbrace{-2y_0}_{b}y + \underbrace{x_0^2+y_0^2-R^2}_{c} = 0$$

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

Oss 1 Possono esserci dei coeff. davanti a x^2 e y^2. L'importante è che il coeff. sia $\boxed{\text{lo stesso}}$

Oss 2 Non compare MAI il termine xy.

1. Dati a,b,c, la formula rappresenta sempre una circonferenza?
2. Dati a,b,c, come ricostruire le coordinate del centro e il raggio?

$a=-2x_0$ $\qquad$ $b=-2y_0$ $\qquad$ $c=x_0^2+y_0^2-R^2$

$$\boxed{x_0=-\frac{a}{2}} \qquad \boxed{y_0=-\frac{b}{2}} \qquad \boxed{R^2}=-c+x_0^2+y_0^2$$

$$\boxed{=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$$

La condizione affinché sia una circonferenza è che

$$-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}>0$$

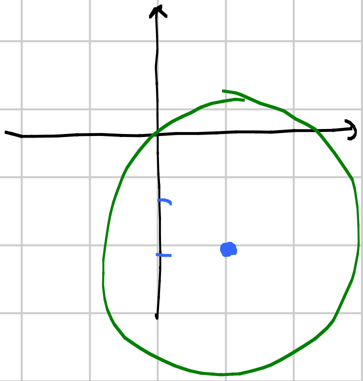
__Esercizio 1__ $x^2+y^2-2x+4y=0$ $a=-2$ $b=4$ $c=0$

$x_0=-\frac{a}{2}=1$ $y_0=-\frac{b}{2}=-2$ $R^2=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$

$=-0+\frac{4}{4}+\frac{16}{4}=5$

$R=\sqrt{5}$

Quando $c=0$ la circ. passa per l'origine



$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $x^2+y^2-2x+4y=0$

$x^2-2x+1+y^2+4y+4=1+4$

$(x-1)^2+(y+2)^2=5$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ $\Rightarrow x_0=1,\ y_0=-2,\ R=\sqrt{5}$

—o—o—

__Esercizio 2__ $x^2+y^2-6x-7=0$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $a=-6$ $b=0$ $c=-7$

$x_0=-\frac{a}{2}=3$, $y_0=-\frac{b}{2}=0$, $R^2=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$

$=7+\frac{36}{4}+0=16$

$R=4$.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $x^2+y^2-6x-7=0$; $\underbrace{x^2-6x+9}+\underbrace{y^2}-7=9$

$(x-3)^2+y^2=16$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

—o—o—

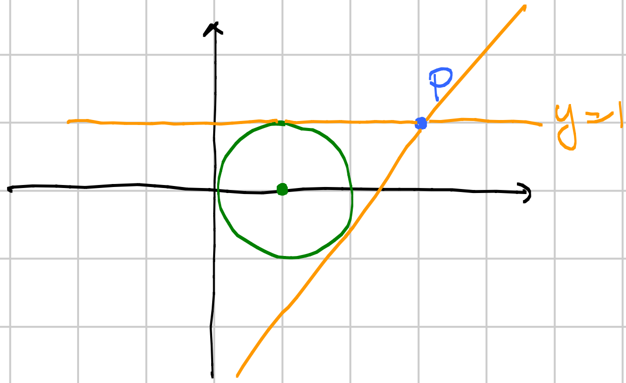
__Esercizio 3__ $x^2+y^2-2x=0$ $P=(3,1)$. Determinare rette per P tangenti alla circonferenza.

$x^2+y^2-2x=0$; $x^2-2x+1+y^2=1$

$(x-1)^2+y^2=1$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ $x_0=1,\ y_0=0,\ R=1$

Ci saranno 2 rette tangenti, di cui una si vede "ad occhio"



Scrivo tutte le rette per P

$y = mx + n$ e impongo di passare per P:

$1 = 3m + n \Rightarrow n = 1 - 3m$

$\Rightarrow y = mx + 1 - 3m = m(x-3) + 1$

Devo imporre alla retta $y = m(x-3)+1$ di essere tg. alla circ. $x^2+y^2-2x=0$. Le metto a sistema e impongo di avere un'unica intersezione.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ y = m(x-3)+1 \end{cases}$$

$$x^2 + [m(x-3)+1]^2 - 2x = 0$$
$$x^2 + m^2(x-3)^2 + 1 + 2m(x-3) - 2x = 0$$
$$x^2 + m^2x^2 - 6m^2x + 9m^2 + 1 + 2mx - 6m - 2x = 0$$
$$x^2(1+m^2) + (-6m^2+2m-2)x + 9m^2 - 6m + 1 = 0$$

Equazione di 2° grado che deve avere 1 sola soluz. $\Rightarrow \Delta = 0$

$$(1+m^2)x^2 - 2(3m^2-m+1)x + 9m^2 - 6m + 1 = 0$$

$$\Delta = (3m^2-m+1)^2 - (9m^2-6m+1)(1+m^2) = 0$$

Si ottiene così un'equazione in m le cui soluzioni sono i valori di m per cui la retta è tangente.

Quante soluz. ci aspettiamo? DUE perché 2 sono le rette tg, una di queste soluz. DEVE ESSERE $m=0$ (e infatti lo è).

— o — o —

Esercizio 4 $\quad x^2+y^2=5 \quad$ centro $C = (0,0) \quad R = \sqrt{5}$

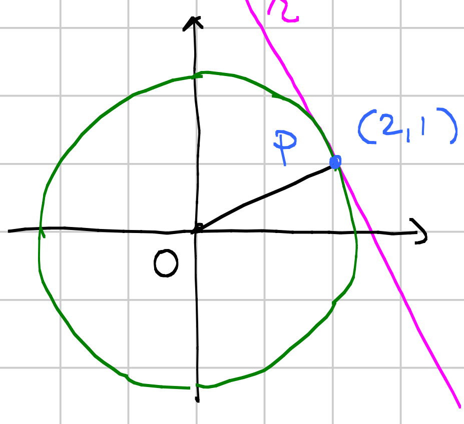
$P = (2,1)$ p.to della circ. Scrivere eq. retta tangente

La retta tg. è $\perp$ al raggi OP

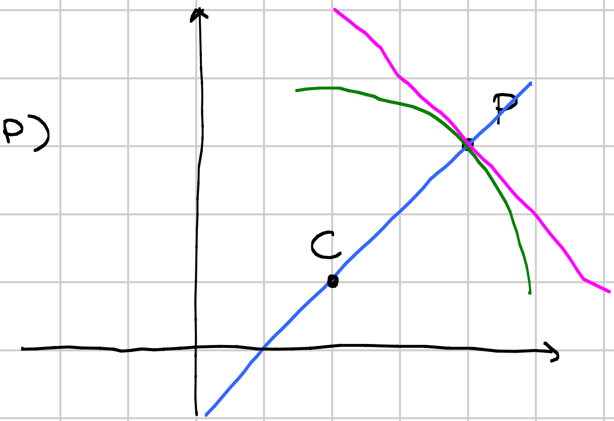
Eq. di OP: $y = \frac{1}{2}x$

retta r: $y = -2x + 5$ Perché sarà $y = -2x + n$. Impongo di passare per P; $1 = -2 \cdot 2 + n$

$\Rightarrow n = 5$



Esercizio 5 Circonferenza con centro in $(2,1)$ e passa per $(4,3)$



$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad R=\text{dist}(C,P)$

$(x-2)^2+(y-1)^2=(2\sqrt{2})^2$

$x^2-4x+4+y^2-2y+1=8$

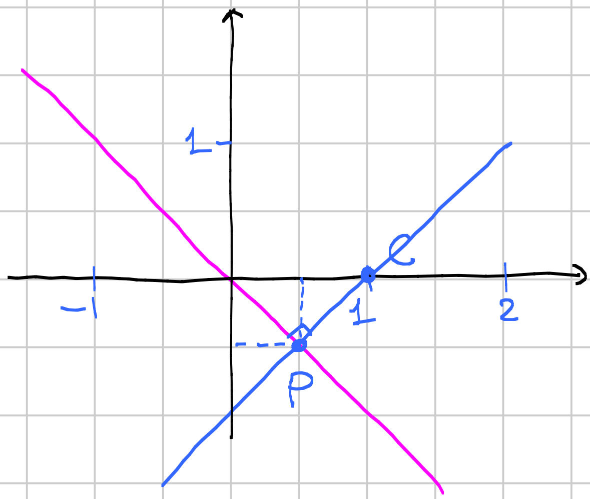
$\boxed{x^2+y^2-4x-2y-3=0}$

retta CP: $y=x-1$; retta tg: $y=-1\cdot x+n$

impongo di passare per P: $3=-4+n \Rightarrow n=7$

— o — o —

Esercizio 6 Centro $(1,0)$ Tangente alla retta $x+y=0$



Raggio = distanza di C dalla retta

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

centro: $(1,0)$ e $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \rightarrow (x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$

$x^2-2x+1+y^2=\frac{1}{2} \rightarrow 2x^2-4x+2+2y^2=1 \rightarrow 2x^2+2y^2-4x+1=0$

Per trovare il p.to P in cui la circonferenza tange la retta:

$\boxed{1° \text{ modo}}$ interseco la retta con la circonferenza

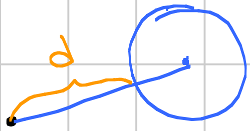
$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-4x+1=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

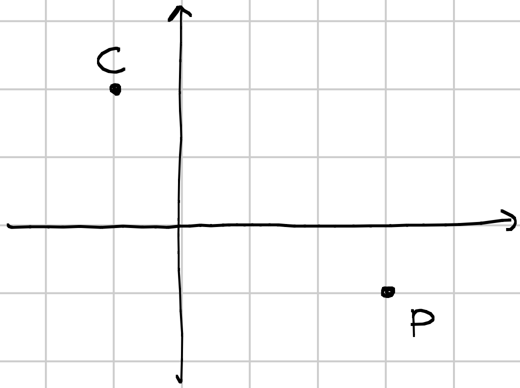
Mi aspetto soluz. unica, cioè $\Delta=0$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Nel punto in cui la perpendicolare per C trova la retta data. Si trova (facendo i conti o guardando la figura) $P=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Esercizio 7 Trovare il valore di a per cui la distanza tra $(3,-1)$ e la circ.

$$x^2+y^2+2x-4y=a \quad \text{è } 2$$





Distanza di P da una circ =
= dist (P, centro) − raggio

$$x^2+y^2+2x-4y=a$$
$$x^2+2x+1+y^2-4y+4=a+1+4$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2=a+5$$
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \quad \to \quad x_0=-1,\ y_0=2$$

Distanza (P, centro) = dist $((-1,2),(3,-1)) = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

Distanza − raggio $= 2 \Rightarrow$ raggio $= 3$

Per quale valore di a la circ. ha raggio 3?

$$R^2=a+5 \qquad 9=a+5 \quad \to \quad a=4.$$