GEOMETRIA ANALITICA

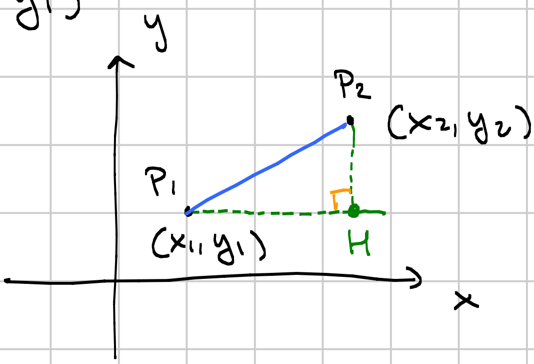
Titolo nota 24/09/2008

Piano cartesiano, punti e coordinate,

DISTANZA TRA DUE PUNTI $P_1 = (x_1, y_1)$ $P_2 = (x_2, y_2)$

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Interpretazione geometrica



$$(P_1P_2)^2 = (P_1H)^2 + (P_2H)^2 \quad \text{(Pitagora)}$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

— o — o —

EQUAZIONE DELLA RETTA

2 forme

1ª FORMA $\boxed{y = mx + n}$ m, n coefficienti dati

VANTAGGI:
- m e n possono essere numeri qualsiasi
- due rette coincidono ⟺ hanno stesso m e stesso n

SVANTAGGI: non tutte le rette si rappresentano in questa forma. Mancano infatti quelle verticali che vanno scritte come $\boxed{x = a}$

2ª FORMA $\boxed{ax + by + c = 0}$ a, b, c coeff. dati

VANTAGGI: tutte le rette (comprese quelle verticali) si rappresentano in questa forma.

SVANTAGGI:
- non è vero che per ogni terna a, b, c ottengo una retta (infatti almeno uno tra a e b deve essere $\neq 0$)
- non è vero che equazioni diverse rappresentano rette diverse (posso molt. tutto per un numero)

Oss. In forma $ax+by+c=0$ due equaz. rappresentano la stessa retta $\Leftrightarrow$ sono l'una multipla dell'altra.

PASSAGGIO DA UNA FORMA ALL'ALTRA

$y = mx+n \rightsquigarrow y - mx - n = 0$

$x = a \rightsquigarrow x - a = 0$

$ax+by+c=0 \rightsquigarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ (ricavo y)

Possibile $\Leftrightarrow b \neq 0$

Se $b=0$, allora per forza $a \neq 0$, ma allora ricavo $x = -\frac{c}{a}$ e ottengo una retta verticale

Oss. In forma $ax+by+c=0$ una retta è

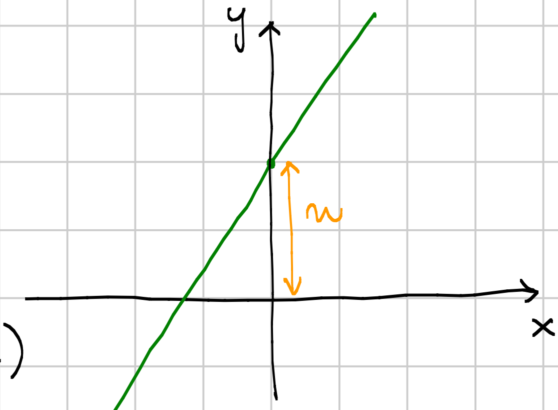
VERTICALE $\Leftrightarrow b=0$

ORIZZONTALE $\Leftrightarrow a=0$

—o—o—

SIGNIFICATO GEOMETRICO DI m ED n.

$\boxed{y = mx+n}$

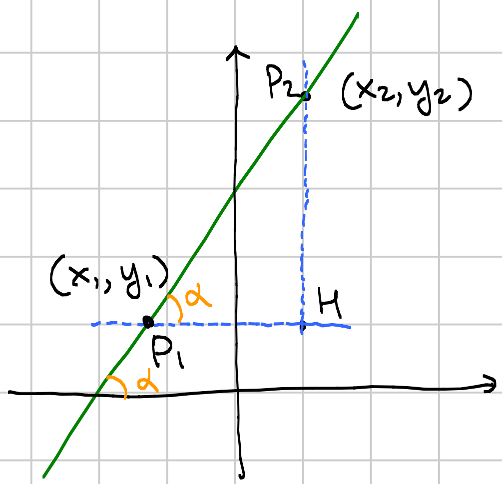


n = valore di y quando metto $x=0$

= $\boxed{\text{ascissa}}$ dell'intersezione tra retta e asse y

ORDINATA: corretto dopo video!

Aumentare n (lasciando invariato m) vuol dire aggiungere ad y una quantità costante = traslare la retta in alto parallelamente a se stessa



$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, mx_1+n)$

$P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, mx_2+n)$

$P_1H = x_2 - x_1$

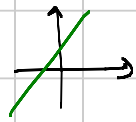
$P_2H = y_2 - y_1 = mx_2 + n - (mx_1 + n)$

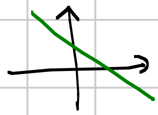
$= m(x_2 - x_1)$

$$\frac{P_2H}{P_1H} = \frac{m(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = m = \text{rapporto tra i 2 cateti}$$

$$P_1H = P_1P_2 \cdot \cos\alpha \qquad \frac{P_2H}{P_1H} = \frac{\cancel{P_1P_2} \cdot \sin\alpha}{\cancel{P_1P_2} \cdot \cos\alpha} = \tan\alpha$$
$$P_2H = P_1P_2 \cdot \sin\alpha$$

$\boxed{m = \text{coeff. angolare} = \tan\alpha}$, dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse x e con ogni retta ad esso parallela

__Oss.__ $m > 0 \iff \tan\alpha > 0 \iff \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \iff$ 

$m < 0 \iff \tan\alpha < 0 \iff \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \iff$ 

— o — o —

__Esercizio__ Scrivere l'eq. della retta che passa per $(1,1)$ e $(2,3)$.

__0° modo__: ricordare la formula per la retta che passa per 2 p.ti

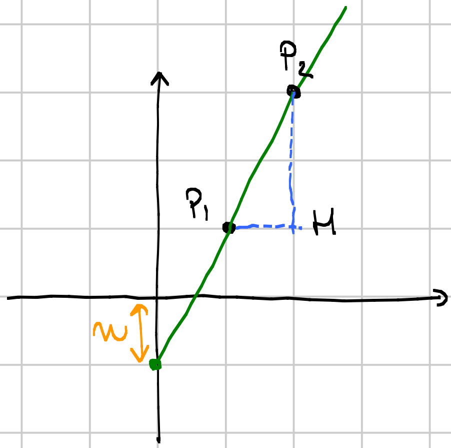
__1° modo__: l'equazione sarà della forma $y = mx + n$.
Impongo di passare per i 2 p.ti

$$\begin{cases} 1 = m + n & \text{(sostituito } (1,1)) \\ 3 = 2m + n & \text{(sostituito } (2,3)) \end{cases}$$

Ottengo un sistema in m ed n che si risolve

2ª eq. − 1ª eq. : $2 = m$ e dalla 1ª ottengo $n = -1$

$y = 2x - 1$



__2° modo__: uso i quadretti!!

$$m = \frac{P_2H}{P_1H} = \frac{2}{1} = 2$$

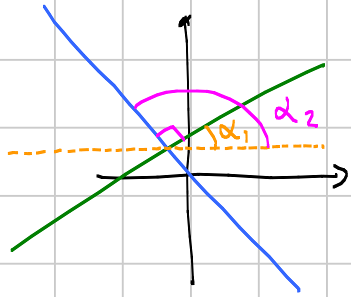
$n = -1 \qquad y = 2x - 1$

RETTE PARALLELE "$\Longleftrightarrow$" stesso m (vale per rette non verticali)

RETTE PERPENDICOLARI: Due rette $y = m_1 x + n_1$ e $y = m_2 x + n_2$ sono perpendicolari "$\Longleftrightarrow$"

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$

In termini di angoli sia α_1 l'angolo corrisp. alla prima e α_2 quello corrispondente alla seconda



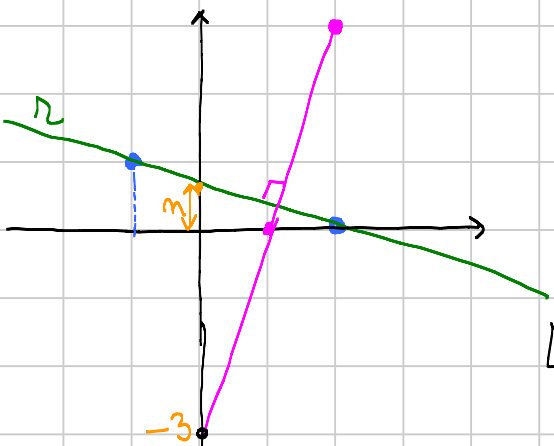
rette perpendicolari $\Longleftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$

ma allora $m_2 = \tan\alpha_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right)$

archi associati $= -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$

— o — o —

Esercizio [1] Scrivere eq. retta passante per $(-1, 1)$ e $(2, 0)$



Coeff. ang. negativo $m = -\frac{1}{3}$

$n = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

[2] Scrivere l'eq. della retta parallela ad r passante per $(0,5)$.

Sarà del tipo $y = \boxed{m}x + n$ stesso di r $\qquad y = -\frac{1}{3}x + n$

Impongo di passare per $(0,5)$: $\quad 5 = -\frac{1}{3}\cdot 0 + n \Rightarrow n = 5$

[3] Scrivere l'eq. della retta perpendicolare ad r e passante per $(2,3)$. Sarà $y = mx + n$ con $m = 3 \Rightarrow y = 3x + n$

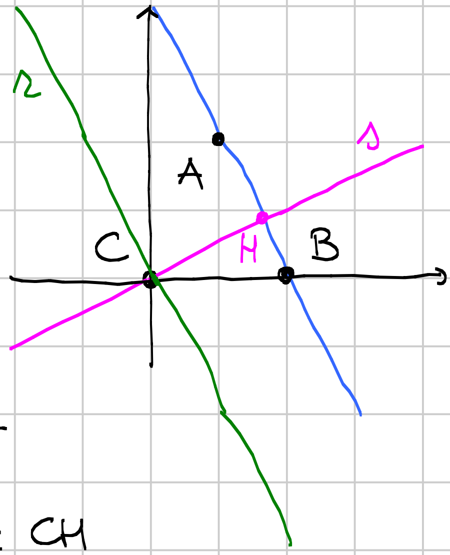
Impongo di passare per $(2,3)$: $\quad 3 = 3\cdot 2 + n \Rightarrow n = -3$

Quindi la retta è

$$y = 3x - 3$$

Esercizio r = retta per C // ad AB
s = retta per C $\perp$ ad AB
d = distanza tra C e retta AB

$A=(1,2)$ $B=(2,0)$ $C=(0,0)$



retta AB : $y=-2x+4$
retta r : $y=-2x$
retta s : $y=\frac{1}{2}x$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Distanza di C dalla retta AB = lungh. di CH
Quindi dovrei: 1. Scrivere l'eq. della $\perp$
2. Trovare l'intersezione
3. Calcolare la distanza

La formula che si ottiene è questa:

La distanza di $P=(x_0,y_0)$ da una retta di eq. $ax+by+c=0$ è

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

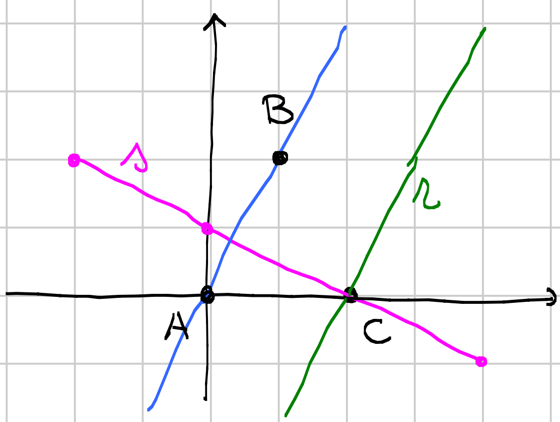
Il denom. non è mai $=0$

Nel nostro caso $\boxed{C=(0,0)}$ retta AB: $y=-2x+4$, cioè $\boxed{y+2x-4=0}$

$$d=\frac{|0+2\cdot 0-4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

—o—o—

ALTRO CASO $A=(0,0)$, $B=(1,2)$, $C=(2,0)$



retta AB: $y=2x$ oppure $y-2x=0$
retta per C // ad AB: $y=2x-4$
retta per C $\perp$ ad AB: $y=-\frac{1}{2}x+1$
distanza di C da retta AB

$$d=\frac{|0-2\cdot 2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

corretto dopo VIDEO