TRIGONOMETRIA: ESERCIZI VARI

Titolo nota 23/09/2008

Esercizio 1 $a=7 \quad b=6 \quad c=5$, trovare angoli e area

Area si fa con Erone $\quad p = \frac{a+b+c}{2} = 9$

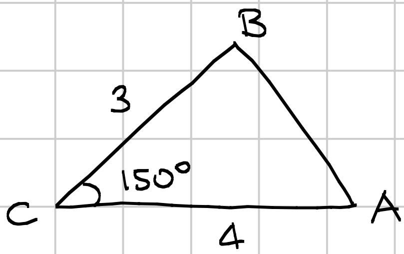
$$\text{Area} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \ldots$$

Per gli angoli uso CARNOT: $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, quindi

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{36+25-49}{60} = \ldots$$

Analogamente: $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Esercizio 2 $a=3 \quad b=4 \quad \gamma = 150°$

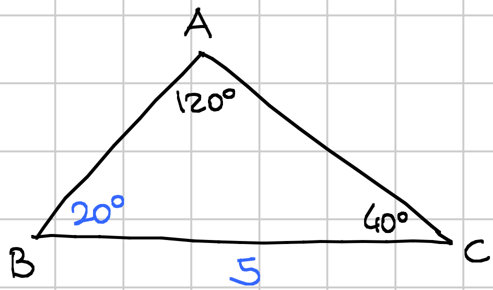


Per calcolare c uso

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$
$$= 9+16-24\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 9+16+12\sqrt{3}$$

Una volta noto c conosco i 3 lati e proseguo come prima

Esercizio 3 $a=5 \quad \alpha = 120° \quad \gamma = 40°$



Si trova $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 20°$.

Se voglio calcolare b uso teo. seni

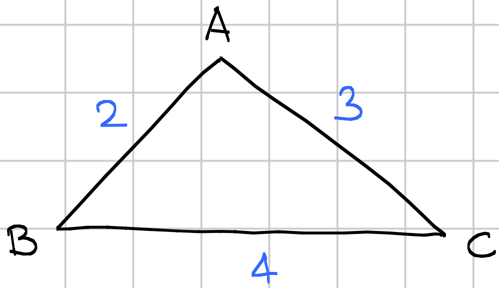
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$ Cosa conosco?

$$\frac{b}{\sin 20°} = \frac{5}{\sin 120°} \Rightarrow b = \frac{5\cdot\sin 20°}{\sin 120°} = \ldots$$

Per calcolare c: $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow c = a\cdot\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

$$= a\cdot\frac{\sin 40°}{\sin 120°} = \ldots$$

Esercizio 4 Come capire se un triangolo è ottusangolo, rettangolo, acutangolo dati i lati



$a = 4$, $b = 3$, $c = 2$

L'angolo più grande (l'unico che può essere ottuso) è α.
Dunque basta capire se α è ottuso, retto, acuto. Si può capire dal segno di $\cos\alpha$, quindi uso teo. coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

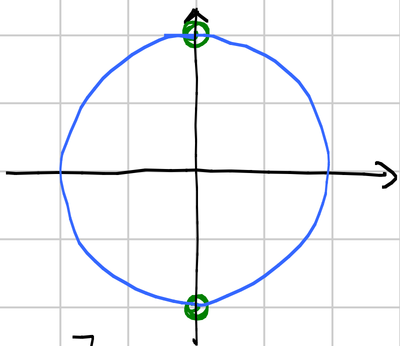
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \text{tutto dipende dal segno di } b^2 + c^2 - a^2$$

Nel nostro caso: $9 + 4 - 16 < 0 \Rightarrow$ OTTUSANGOLO.
In generale tutto dipende dalla somma dei quadrati dei 2 lati + piccoli − il quadrato del lato + grande.

— o — o —

Esercizio 5

$\underbrace{\cos x = 0}_{\text{cerco i p.ti della circ. trigonometrica con ascissa } = 0}$ $\quad x \in [0, 3\pi]$ Guardo il cerchio



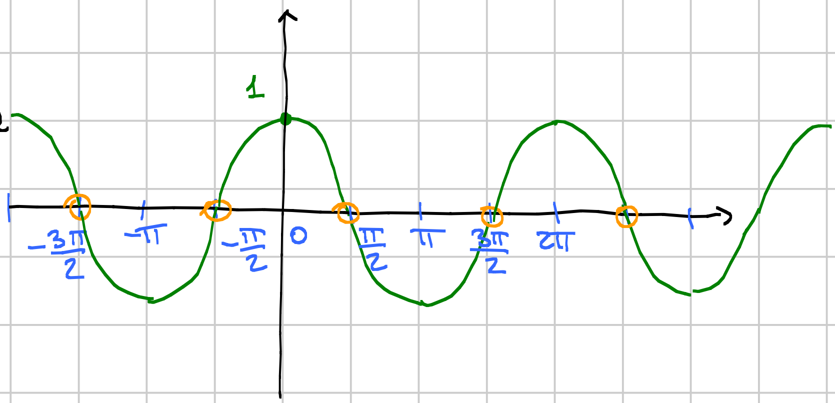
$x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$

Se fosse stato: $\cos x = 0$ $\quad x \in [-2\pi, 2\pi]$

$x = -\frac{3\pi}{2}$ $\quad x = -\frac{\pi}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{2}$ $\quad x = \frac{3\pi}{2}$

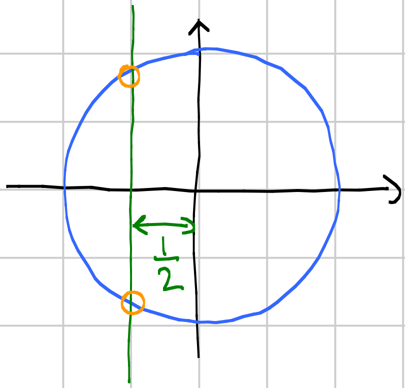
Grafico di $\cos x$

$\cos x = 0$ vuol dire trovare i valori di x in cui il grafico sta ad altezza 0, cioè tocca l'asse x

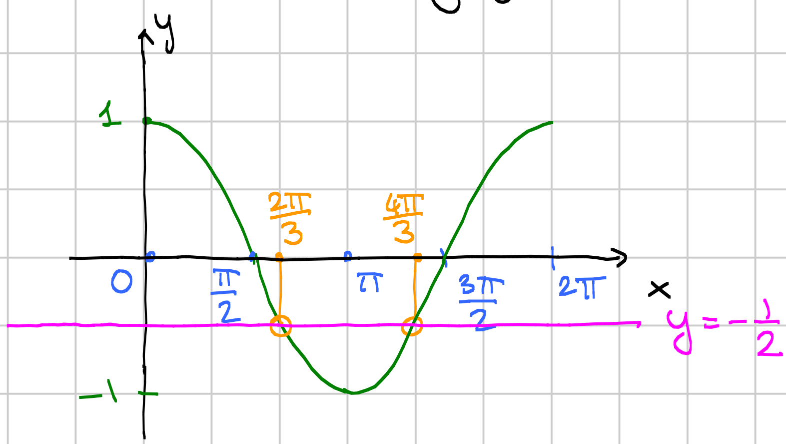


Es. 5 $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\quad x \in [0, 2\pi]$

Guardo il cerchio



Guardo il grafico

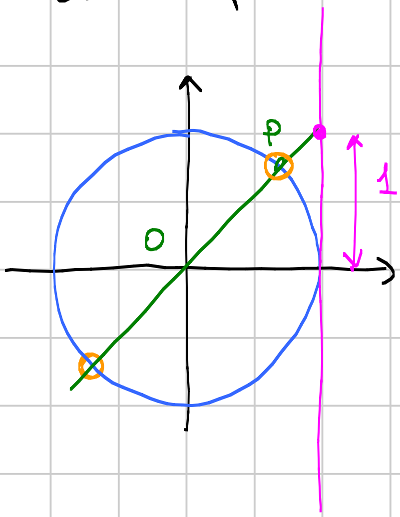


$x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$

— o —

Es. 6 $\cos x = \sin x$ $\quad x \in [0, 2\pi]$ $\quad$ Divido per $\cos x$:

$1 = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \tan x = 1$



$x = \frac{\pi}{4}$ $\quad x = \frac{5\pi}{4}$

Se fosse stato $x \in [-\pi, \pi]$?

$x = -\frac{3\pi}{4}$ $\quad x = \frac{\pi}{4}$

— o —

Es. 7 $\sin x \cdot \cos x = 1$ $\quad$ Molt. per 2 : $\quad 2\sin x \cdot \cos x = 2$

cioè $\sin(2x) = 2$ $\rightsquigarrow$ IMPOSSIBILE

— o —

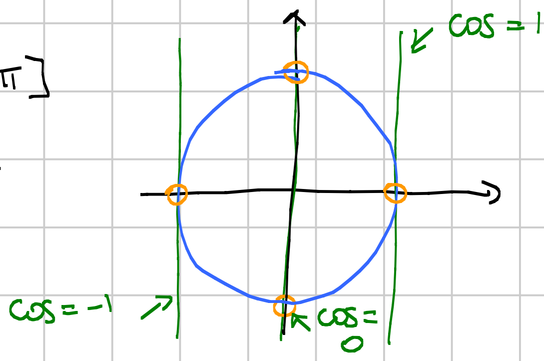
Es. 8 $\cos^3 x = \cos x$; $\quad \cos^3 x - \cos x = 0$

$\cos x (\cos^2 x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos^2 x - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \cos x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{matrix}$$

Se abbiamo come limitazione $[0, 2\pi]$

$x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = 2\pi$



Es. 9 $\quad 2\cos^2 x + 5\sin x = 4 \qquad x \in [0, 2\pi]$

Cerchiamo di scrivere usando solo $\sin x$

$$2(1-\sin^2 x) + 5\sin x = 4$$

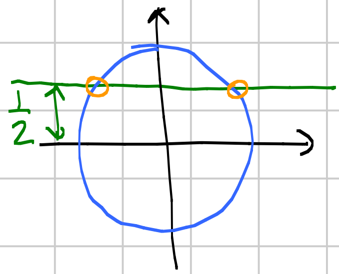
$$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \; ; \quad -2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \qquad \sin x = t$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tornando in $\sin x$ ottengo



$t = 2 \qquad \sin x = 2 \rightarrow$ NULLA

$t = \frac{1}{2} \qquad \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \; x = \frac{5\pi}{6}$

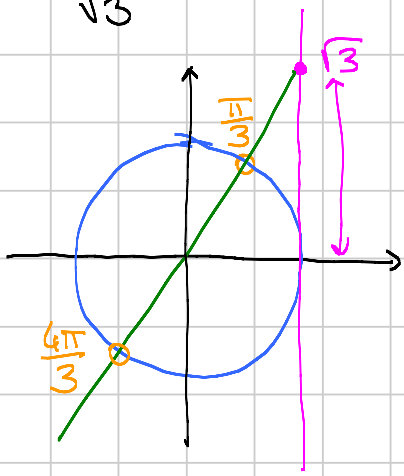
— o —

Es. 10 $\quad 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x \cos x = 2\cos^2 x$

FORMULE DUPLICAZIONE

$$\frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{3}} = 2\cos^2 x - 1 \; ; \quad \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3}} = \cos(2x)$$

$$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \sqrt{3} \; ; \quad \tan(2x) = \sqrt{3}$$



$2x = \frac{\pi}{3} \qquad x = \frac{\pi}{6}$

$2x = \frac{4\pi}{3} \qquad x = \frac{2\pi}{3}$

soluzioni in $\boxed{[0, 2\pi]}$

No!!! solo in $[0, \pi]$

È corretto che $\quad 2x = \frac{\pi}{3} \quad$ e $\quad 2x = \frac{4\pi}{3}$, ma anche

$$2x = \frac{7\pi}{3} \quad \text{e} \quad 2x = \frac{10\pi}{3}$$

Dividendo per 2 trovo $\quad x = \frac{\pi}{6}, \; x = \frac{2\pi}{3}, \; x = \frac{7\pi}{6}, \; x = \frac{5\pi}{3}$

sono tutte soluzioni tra 0 e 2π.

Morale: se ho un'eq. con sin/cos/tan $(2x)$ e voglio $x \in [0, 2\pi]$, devo considerare tutte le sol. con $2x \in [0, 4\pi]$

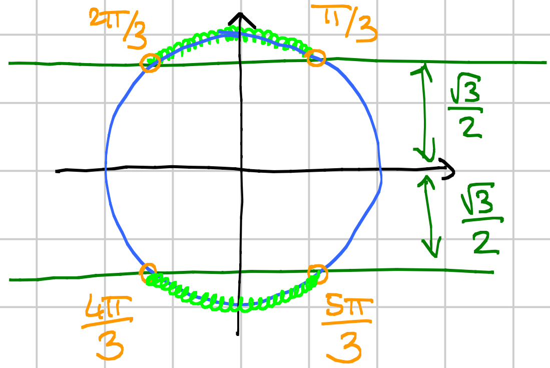
Es. 11 $\quad 4\sin^2 x > 3 \qquad x \in [0, 2\pi]$

$$\sin^2 x > \frac{3}{4}$$

VALORI ESTERNI

$$\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Guardo il cerchio e cerco i p.ti con coord. y maggiore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$ oppure minore di $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



In $[0, 2\pi]$ la sol. è $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

Es. 12 $\quad \tan x \geq \sin(2x)$

Uso formule:

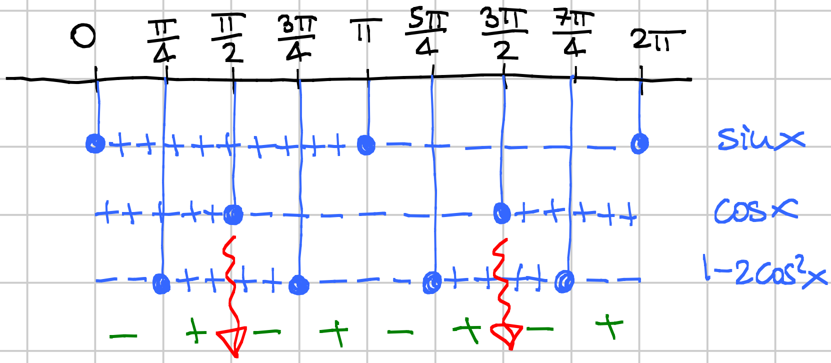
$$\frac{\sin x}{\cos x} \geq 2\sin x \cos x$$

VIETATO MOLTIPLICARE PER $\cos x$

Porto tutto a sx: $\quad \frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x \cos x \geq 0$

$$\frac{\sin x - 2\sin x \cos^2 x}{\cos x} \geq 0 \qquad \frac{\sin x \left(1 - 2\cos^2 x\right)}{\cos x} \geq 0$$

Risolvo come prodotto / quoziente, studiando il segno dei 3 termini in $[0, 2\pi]$



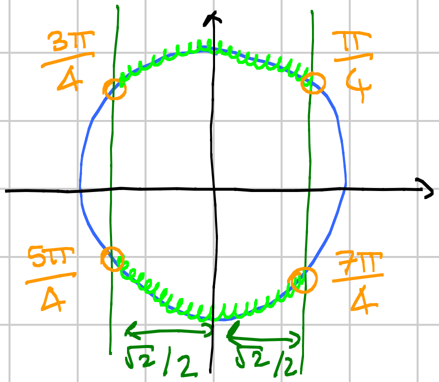
$1 - 2\cos^2 x > 0 \iff 2\cos^2 x < 1$

$\iff \cos^2 x < \frac{1}{2}$.

Valori interni

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Guardo il cerchio!



A noi interessava ≥ 0:

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup$$

$$\cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$