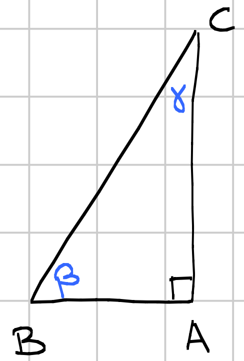
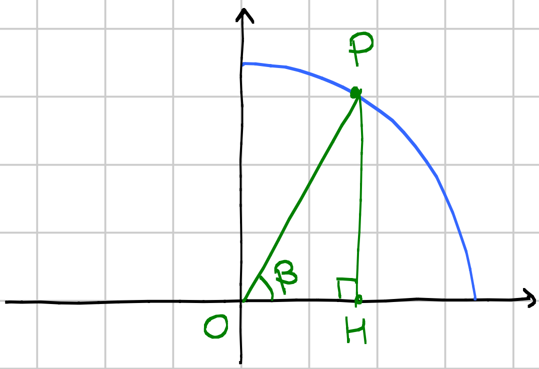
TRIGONOMETRIA E TRIANGOLI

Titolo nota 23/09/2008

TRIANGOLO RETTANGOLO





Obiettivo della trigonometria applicata ai triangoli è la RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI (dati alcuni elementi, trovare i restanti).

Nel caso rettangolo ABC è simile a HOP, dunque i lati sono in proporzione

$$\frac{AB}{HO} = \frac{AC}{HP} = \frac{BC}{OP}$$

In HOP abbiamo che $OP = 1$, $OH = \cos\beta$, $PH = \sin\beta$

$$\frac{AB}{\cos\beta} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{1}$$

da qui si ricavano tutte le formule

$$\boxed{\begin{aligned} AB &= BC \cdot \cos\beta \\ AC &= BC \cdot \sin\beta \end{aligned}}$$

CATETI IN FUNZIONE DI IPOTENUSA E UN ANGOLO

Se invece di β conosco γ ho che $\beta = 90° - \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma$

quindi (archi associati)

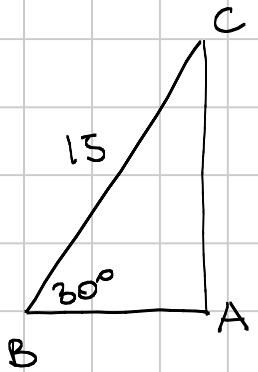
$$\cos\beta = \cos(90° - \gamma) = \sin\gamma, \quad \sin\beta = \sin(90° - \gamma) = \cos\gamma$$

$$\boxed{\begin{aligned} AB &= BC \cdot \sin\gamma \\ AC &= BC \cdot \cos\gamma \end{aligned}}$$

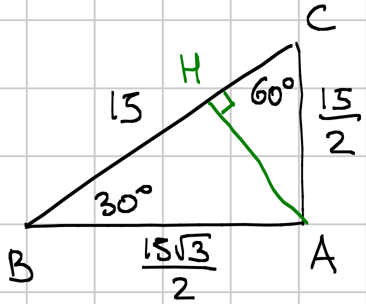
CATETI IN FUNZIONE DI IPOTENUSA E ALTRO ANGOLO

CATETO = IPOTENUSA · ↗ COS ANGOLO ADIACENTE
↘ SIN ANGOLO OPPOSTO

Esercizio 1 $BC = 15$ $\hat{B} = 30°$ $\hat{A} = 90°$



Più in scala



$$AB = BC \cdot \cos 30° = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

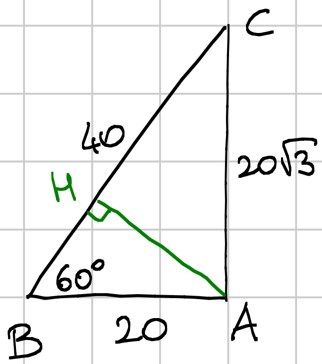
$$AC = 15 \cdot \sin 30° = 15 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

Per calcolare AH considero il triangolo rettangolo HCA

$$\underset{\text{CATETO}}{AH} = \underset{\text{IPOT.}}{AC} \cdot \underset{\text{ANGOLO OPPOSTO AL CATETO}}{\sin 60°} = \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

— o — o —

Esercizio 2 $AB = 20$ $\hat{B} = 60°$ $\hat{A} = 90°$



$$AB = BC \cdot \cos 60° = BC \cdot \frac{1}{2}$$

$$BC = 2AB = 40 \;;\; AC = BC \cdot \sin 60°$$
$$= 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

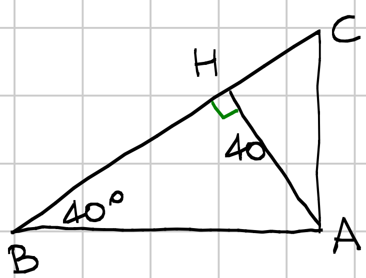
Guardo il triangolo rettangolo AHB

$$\underset{\text{cateto}}{AH} = \underset{\text{ipot.}}{AB} \cdot \underset{\text{angolo opposto}}{\sin 60°} = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

— o — o —

Esercizio 3 $\hat{B} = 40°$ $AH = 40$.   Guardo AHB :

$$\underset{\text{cateto}}{AH} = \underset{\text{ipot.}}{AB} \cdot \underset{\text{angolo opposto}}{\sin 40°}$$



$$\Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin 40°} = \frac{40}{\sin 40°} = \ldots$$

$BC \cdot \cos 40° = AB \rightsquigarrow$ trovo $BC \ldots$

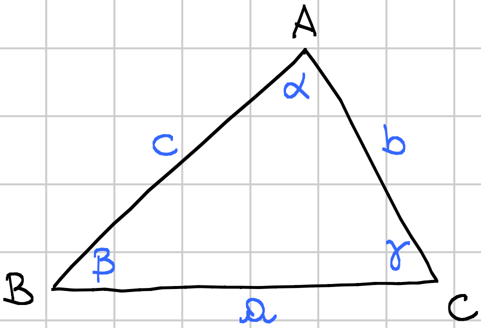
TRIANGOLI QUALUNQUE

Quattro strumenti fondamentali:

1. FORMULA TRIGO PER AREA
2. TEO. CARNOT (TEO. COSENO)
3. FORMULA DI ERONE PER AREA
4. TEO. SENI

— o — o —

0 NOTAZIONI STANDARD



p = semiperimetro = $\frac{a+b+c}{2}$

S = Area

R = raggio circ. circoscritta (quella che passa per A, B, C)

r = raggio circ. inscritta (tangente ai 3 lati)

— o — o —

1 FORMULA TRIGONOMETRICA PER L'AREA

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta}$$

"Due lati per sin angolo compreso"

2 TEOREMA DEL COSENO (CARNOT)

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2+a^2-2ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

Per $\alpha = 90°$ diventa pitagora

3 FORMULA DI ERONE PER L'AREA

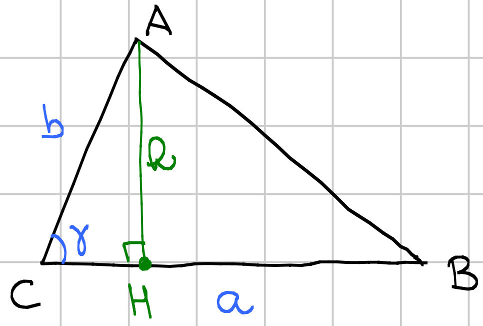
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

4 TEO. SENI

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$

$\frac{\text{lato}}{\text{sin ang. opposto}}$

Come si dimostrano?



(1) Situazione: conosco a, b, γ.
Voglio calcolare l'area

$S = \frac{1}{2} a \cdot \ell$. Devo calcolare ℓ. Considero il triangolo retto.

CAH: $\underset{\text{cateto}}{AH} = \underset{\text{ipot.}}{AC} \cdot \underset{\text{sin. angolo opposto}}{\sin\gamma} = b \sin\gamma$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot \ell = \frac{1}{2} a \cdot b \sin\gamma$$

(2) Situazione: conosco a, b, γ. Voglio calcolare c, cioè AB.
Per Pitagora:

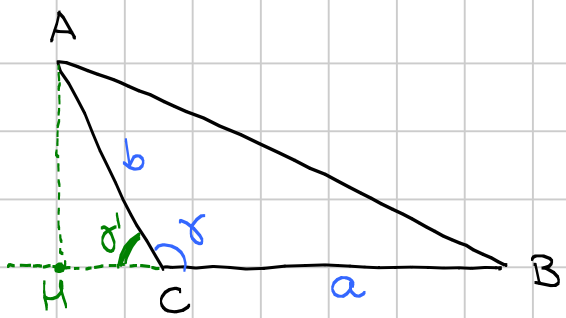
$$AB^2 = \underbrace{AH^2}_{\text{si calcola come prima}} + HB^2 \qquad HB = \underset{\text{conosco}}{CB} - \underset{\text{posso calcol.}}{CH}$$

$$AH = b \cdot \sin\gamma, \quad CH = b \cdot \cos\gamma, \quad HB = a - b\cos\gamma$$

$$\boxed{c^2} = AB^2 = AH^2 + HB^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2$$
$$= b^2\sin^2\gamma + a^2 + b^2\cos^2\gamma - 2ab\cos\gamma$$
$$= b^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + a^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$\boxed{= b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma}$$

— o — o —

Fregatura:
In questa figura



$AH = AC \cdot \sin\gamma'$

$= AC \cdot \sin(180° - \gamma)$

$= AC \cdot \sin\gamma$ (quindi le formule precedenti valgono ancora)

$AB^2 = AH^2 + HB^2 = AH^2 + (CB + HC)^2$

$HC = b \cdot \cos\gamma' = b \cdot \cos(180° - \gamma) = -b\cos\gamma$

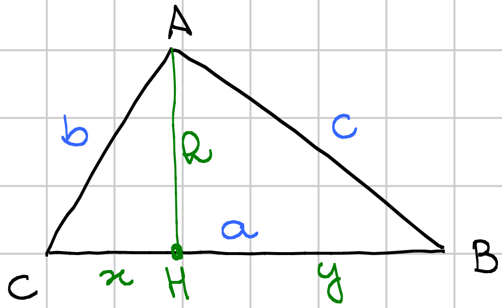
Aggiungere $-b\cos\gamma$ è come sottrarre $b\cos\gamma$

③ ERONE

Situazione:

conosco a, b, c.

Voglio calcolare S



$S = \frac{1}{2} a \cdot h$ Problema: calcolare h. Chiamo $x = CH$, $y = HB$

Scriviamo 3 equazioni che legano x, y, h (incognite)

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = b^2 \\ y^2 + h^2 = c^2 \\ x + y = a \end{cases}$$

Pitagora in ACH

Pitagora in ABH

Somma di lunghezze

Risolvendo il sistema, si trovano x, y, h

Come si risolve il sistema?

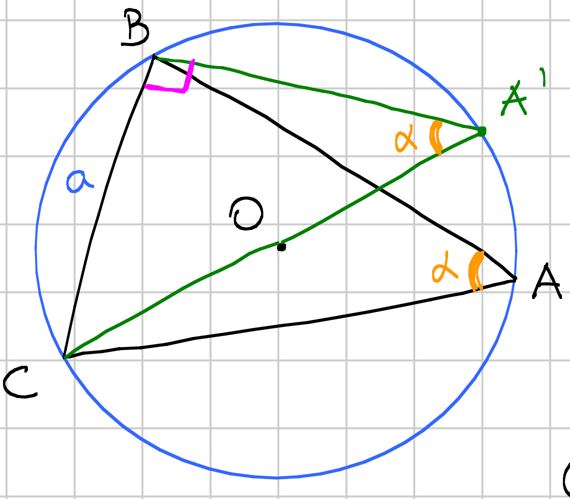
1ª equazione − 2ª equazione: $x^2 - y^2 = b^2 - c^2$

$$\underbrace{(x+y)}_{a}(x-y) = b^2 - c^2$$

$x - y = \frac{b^2 - c^2}{a}$; $x + y = a$ ⇝ trovo x e y ⇝ trovo h

—o—o—

④ TEO. SENI



- CA' è un diametro, quindi $A'\hat{B}C$ è di $90°$
- $C\hat{A'}B = \alpha$ perché tutti gli angoli che insistono sulla corda BC e hanno il vertice sulla circonferenza hanno la stessa ampiezza

Considero il triangolo rettangolo $A'BC$

$BC = CA' \cdot \sin\alpha$, cioè $a = 2R \cdot \sin\alpha$,

cateto — ipotenusa (che è diametro) — angolo opposto

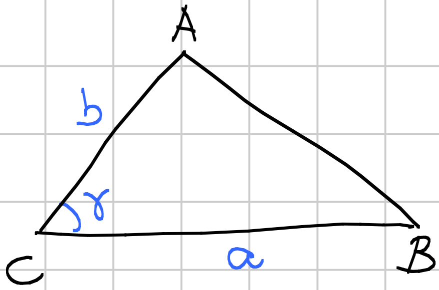
cioè

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

—o—o—

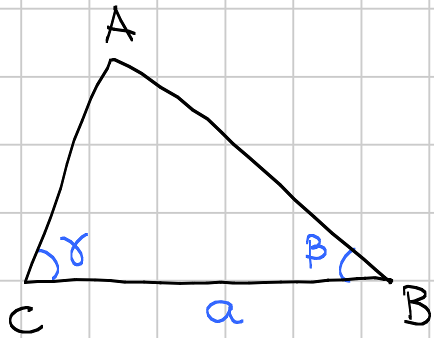
RISOLUZIONE DI TRIANGOLI

Caso 1 Noti 2 lati e l'angolo compreso.



1. Calcolo c con il teorema del COSENO
2. Per calcolare α e β posso ricorrere ancora al teo del coseno, oppure al teo dei seni

Caso 2 Noti 2 angoli e lato ad essi adiacente

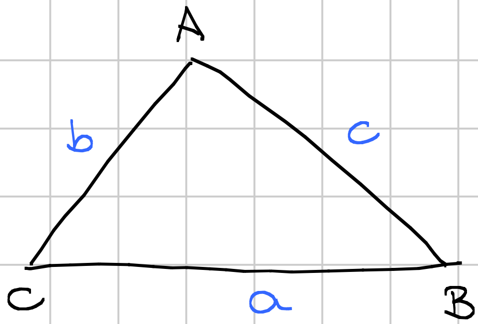


1. $\alpha = \pi - \beta - \gamma$
2. Uso poi il teo dei seni

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \boxed{a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}$$

conosco tutto

Caso 3 Noti 3 lati. Voglio i 3 angoli



2 modi:

* teo. coseno e trovo i coseni degli angoli
* calcolo l'area con ERONE e quindi i seni degli angoli con la formula trigo. per l'area

— o —

ACHTUNG! È meglio conoscere il seno o il coseno dell'angolo di un triangolo?

$\sin\alpha = \frac{1}{2} \longrightarrow \alpha = 30°$ oppure $\alpha = 150°$

(Due possibilità)

Con il coseno ce n'è sempre UNO SOLO

MEGLIO IL COSENO !!!