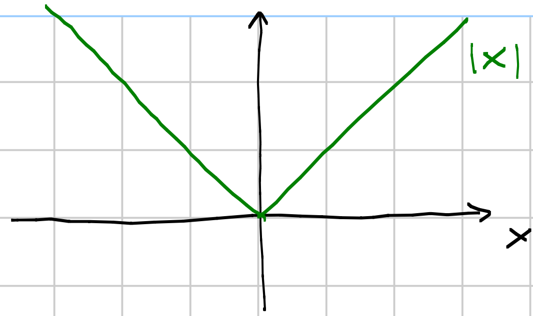
VALORI ASSOLUTI E RELATIVE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Titolo nota 19/09/2008

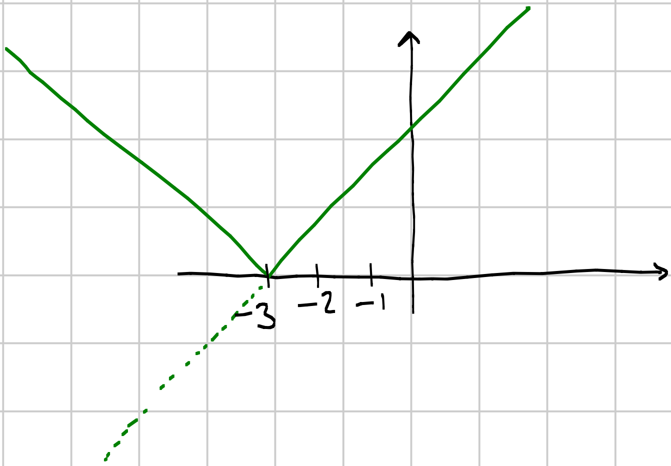
VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Occhio:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x+3 \geq 0, \text{ cioè se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x+3 < 0, \text{ cioè se } x < -3 \end{cases}$$



Equazioni e disequazioni con valori assoluti:

togliere i valori assoluti distinguendo i 2 casi.

Esempio 1 $\quad |x+1| = 3x - 4 \quad$ Distinguo i casi a seconda del segno di $x+1$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 = 3x-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 = 3x-4 \end{cases}$$

Tra le soluz. dei 2 sistemi si fa poi l'unione

Risolvere questo sistema vuol dire risolvere l'eq. e prendere solo le soluzioni che verificano la diseq.

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x = 5 \end{cases} \qquad x = 5/2$$

compatibile con la diseq., quindi accettabile

$$\begin{cases} x+1<0 \\ -x-1=3x-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-1 \\ 4x=3 \end{cases} \qquad x=3/4$$ NON ACCETTABILE perchè non soddisfa la diseq.

Conclusione: l'eq. ha come unica soluz. $x=5/2$.

Esempio 2 $\quad |x^2-4|=1$

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x^2-4=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-4<0 \\ -x^2+4=1 \end{cases}$$ Risolvo separatamente e poi faccio l'unione

$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x^2=5 \end{cases} \to x=\pm\sqrt{5}$$ compatibili con la diseq. $\Rightarrow$ accettabili

$$\begin{cases} x^2<4 \\ x^2=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \in (-2,2) \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases} \to$$ compatibili $\Rightarrow$ accettabili

L'equazione iniziale ha 4 soluzioni $x=\pm\sqrt{3}$, $x=\pm\sqrt{5}$.

—o—o—

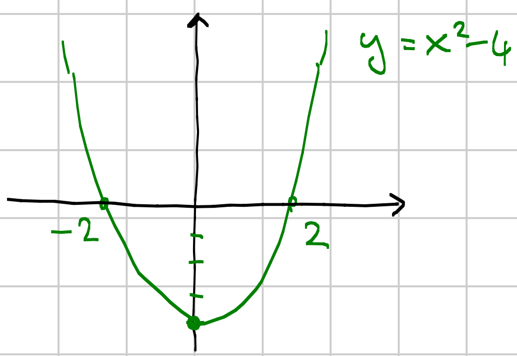
Esempio 3 $\quad |x^2-4|=9$

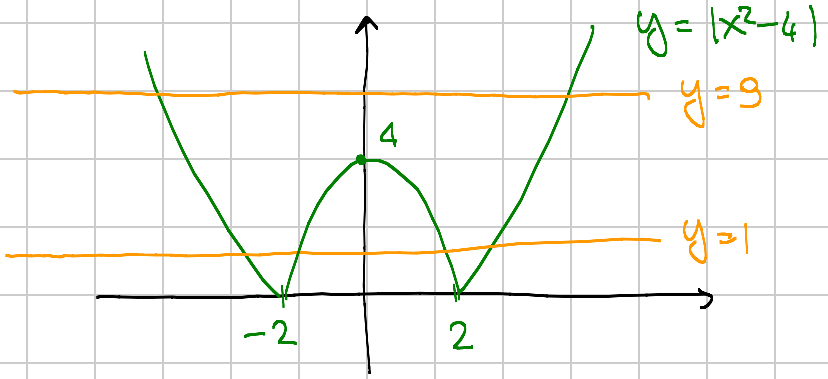
$$\begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x^2-4=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-4<0 \\ -x^2+4=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 4 \\ x^2=13 \end{cases} \to x=\pm\sqrt{13} \qquad \begin{cases} x^2<4 \\ x^2=-5 \end{cases} \to \text{NULLA}$$

accettabili

L'equazione ha 2 soluzioni $x=\pm\sqrt{13}$



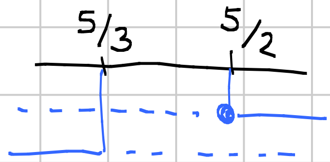


Esempio 4 $|2x-5|+x<0$ Distinguo 2 casi per eliminare il valore assoluto

$$\begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 2x-5+x<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-5<0 \\ -2x+5+x<0 \end{cases}$$

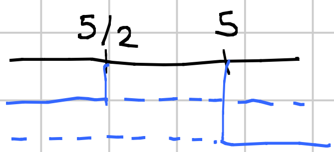
Risolvo separ. i 2 sistemi, poi faccio l' UNIONE

1° $\begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 3x-5<0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x \geq 5 \\ 3x<5 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 5/2 \\ x < \frac{5}{3} \end{cases}$



Nessuna zona comune $\Rightarrow$ NO SOLUZIONI

2° $\begin{cases} 2x-5<0 \\ -x+5<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x<5/2 \\ x>5 \end{cases}$



Nessuna zona comune $\Rightarrow$ NO SOL.

La diseq. iniziale non ha soluzioni

Esempio 5 $|2x-3|>x+10$

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 2x-3>x+10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3<0 \\ -2x+3>x+10 \end{cases}$$

1° $\begin{cases} 2x \geq 3 \\ x>13 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 3/2 \\ x>13 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x>13}$ Soluz. 1° sistema

2° $\begin{cases} 2x<3 \\ -3x>7 \end{cases}$ $\begin{cases} x<3/2 \\ x<-7/3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x<-7/3}$ Soluz. 2° sistema

Soluz. diseq. iniziale = UNIONE soluz. dei 2 sistemi

$$= (-\infty, -7/3) \cup (13, +\infty)$$

Esempio 6 $|x+1|+|2x+3|=4x+8$ Distinguo 4 casi a seconda dei segni

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ x+1+2x+3=4x+8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3<0 \\ x+1-2x-3=4x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1<0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ -x-1+2x+3 = 4x+8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1<0 \\ 2x+3<0 \\ -x-1-2x-3 = 4x+8 \end{cases}$$

Risolvo i 4 sistemi

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3/2 \\ x = -4 \end{cases} \quad \text{INCOMPATIBILE} \qquad \begin{cases} x \geq -1 \\ x < -3/2 \\ \end{cases}$$

Già queste 2 sono incompatibili

$$\begin{cases} x < -1 \\ x \geq -3/2 \\ 3x = -6 \quad x=-2 \end{cases} \quad \text{INCOMPATIBILE} \qquad \begin{cases} x<-1 \\ x<-3/2 \\ 7x = -12 \end{cases} \quad x = -12/7$$

$x = -12/7$ è < -1 e anche $< -3/2$, quindi è compatibile

Conclusione: l'equazione iniziale ha come unica soluzione $x = -12/7$.

— o — o —

Esempio 7 $\quad (x-2)\log_5 x > 0 \quad$ Disequazione con prodotto

Studio separatamente i 2 fattori

$x-2>0$ per $x>2$

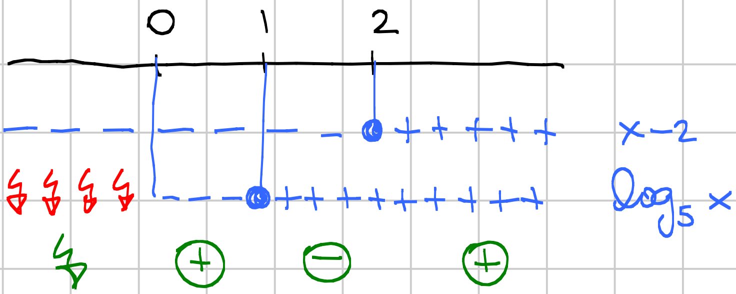
$x-2=0$ per $x=2$

$x-2<0$ per $x<2$

$\log_5 x > 0$ per $x>1$

$\log_5 x = 0$ per $x=1$

$\log_5 x < 0$ per $0<x<1$



Soluz. diseq.: $(0,1) \cup (2,+\infty)$

Se fosse stato $(x-2)\log_5 x \leq 0$ la sol. sarebbe stata $[+1, 2]$

Se fosse stato $(x-2)\log_5 x \geq 0$ la sol. era $(0,1] \cup [2,+\infty)$

Esempio 8 $\quad 4^x - 5\cdot 2^x + 4 \leq 0 \quad ; \quad [2^x]^2 - 5\cdot 2^x + 4 \leq 0$

Pongo $t = 2^x$: $\quad t^2 - 5t + 4 \leq 0 \quad$ radici: $t=1, t=4$

Soluzione in t $\quad 1 \leq t \leq 4$. Torno in x:

$1 \leq 2^x \leq 4$, cioè

$$\begin{cases} 2^x \geq 1 \\ 2^x \leq 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2^x \geq 2^0 \\ 2^x \leq 2^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 2 \qquad [0,2]$$

Esempio 9 $\quad (3^{x+3} - 1)(x+3) \leq 0 \quad$ Diseq. con prodotto

$x+3 > 0$ per $x > -3$

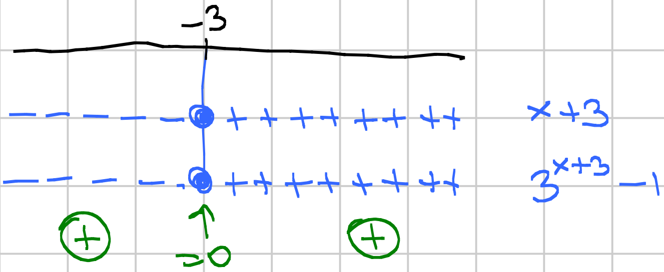
$x+3 = 0$ per $x = -3$

$x+3 < 0$ per $x < -3$

$3^{x+3} - 1 > 0 \iff 3^{x+3} > 1 \iff 3^{x+3} > 3^0 \iff x+3 > 0 \iff x > -3$

$3^{x+3} - 1 = 0 \iff \quad \ldots \quad \iff x = -3$

$3^{x+3} - 1 < 0 \iff \quad \ldots \quad \iff x < -3$



La soluz. della diseq. data è solo $x = -3$

CONSEGUENZA DELL'ALTRA

Esempio 10 $\quad \sqrt{x+3} > 4$

$\boxed{x+3 \geq 0}$ BUROCRAZIA

$x+3 > 16$ QUADRATI

Soluzione: $\quad x > 13 \qquad (13, +\infty)$

Esempio 11 $\quad \sqrt{x+3} > -4 \quad$ sempre verificata purché la radice abbia senso, quindi

$x+3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -3}$

Esempio 12 $\quad \sqrt{x+3} < 5 \qquad \begin{cases} x+3 \geq 0 & \text{BUROCRAZIA} \\ x+3 < 25 & \text{QUADRATI} \end{cases}$

$x \geq -3, \quad x < 22 \quad \Rightarrow \quad [-3, 22)$

Esempio 13 $\sqrt{x} < |x-2|$ Distinguo 2 casi per eliminare il $|\cdot|$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x} < x-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2 < 0 \\ \sqrt{x} < -x+2 \end{cases}$$

Risolvo separatamente e faccio l'unione

... così è lasciato per esercizio ...

Alternativa + rapida $\quad x \geq 0$ BUROCRAZIA

$|x-2| \geq 0$ sempre (si annulla $\Leftrightarrow x = 2$)
Quindi (perché $x \geq 0$) posso fare i quadrati ottenendo

$$x < |x-2|^2 = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

In conclusione ho ottenuto il sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{valori est. a } 1, 4 \end{cases}$$

Sol. diseq. iniz. = soluz. sistema
= parte comune $= [0,1) \cup (4, +\infty)$