EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON RADICI

- Radici di indice dispari $\sqrt[3]{\ }, \sqrt[5]{\ }, \dots$
- Radici di indice pari $\sqrt{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[6]{\ }, \dots$

INDICE DISPARI

$$\boxed{\sqrt[3]{A(x)} = B(x) \iff A(x) = [B(x)]^3}$$ SI

Idea: 2 numeri sono uguali $\iff$ i loro cubi sono uguali

$$\boxed{\sqrt[3]{A(x)} > B(x) \iff A(x) > [B(x)]^3}$$ SI

Idea: il cubo di un numero A è più grande del cubo di un numero B $\iff$ A è più grande di B

Detto altrimenti: il cubo conserva l'ordine

Esempio 1 $\quad \sqrt[3]{x+3} = 2 \iff x+3 = 2^3 \iff x+3 = 8$

$\iff x = 5$

Esempio 2 $\quad \sqrt[3]{x^3-8} = x+1 \iff x^3-8 = (x+1)^3 \iff$

$\iff \cancel{x^3}-8 = \cancel{x^3}+3x^2+3x+1 \iff 3x^2+3x+9 = 0$

$\iff x^2+x+3 = 0 \qquad \Delta < 0 \Rightarrow$ nessuna soluzione

Esempio 3 $\quad \sqrt[5]{x^2-7} > 2 \qquad$ Posso fare le 5ª potenze

$x^2-7 > 2^5 \iff x^2-7 > 32 \iff x^2 > 39$

Valori esterni: $\quad (-\infty, -\sqrt{39}) \cup (\sqrt{39}, +\infty)$

Esempio 4 $\quad \sqrt[3]{x} \leq x \iff x \leq x^3 \iff x^3-x \geq 0 \iff x(x^2-1) \geq 0$

$x(x+1)(x-1) \geq 0 \rightsquigarrow$ Diseq. con prodotti

RADICI DI INDICE PARI

$$\boxed{\sqrt{A(x)} = B(x) \iff A(x) = [B(x)]^2}$$

Non si può fare

Esempio $\sqrt{x} = -2$ questa non ha soluzioni. Se faccio il quadrato ottengo $x = 4$ soluzione FINTA!!
Se sostituisco nell'eq. originaria ottengo $2 = -2$
fare il quadrato distrugge la diff. di segno!

In pratica: fare il quadrato si può, ma occorre poi verificare le soluzioni ottenute.

Esempio 1 $\sqrt{x+1} = 9$ elevo al quadrato: $x+1 = 81$
$\boxed{x = 80}$. Sostituisco $\sqrt{81} = 9$ ok!

Esempio 2 $\sqrt{x+1} = -9$. Elevo al quadrato $x+1 = 81$
$\boxed{\cancel{x = 80}}$. Sostituisco $\sqrt{81} = -9$ NO!
NO

Esempio 3 $\sqrt[4]{x-8} = 3$. Elevo alla quarta: $x - 8 = 3^4 = 81$
$\boxed{x = 89}$. Sostituisco: $\sqrt[4]{81} = 3$ OK!

Esempio 4 $\sqrt{x+14} = x+2$. Elevo al quadrato:

$x + 14 = (x+2)^2$

$x + 14 = x^2 + 4x + 4$, $x^2 + 3x - 10 = 0$

$S = -3$, $P = -10$ Soluzioni: $x = -5$, $x = 2$

Sostituisco $x = -5$: $\sqrt{9} = -3$ NON ACCETTABILE

Sostituisco $x = 2$: $\sqrt{16} = 4$ Ok!

$\Rightarrow$ L'eq. ha una sola soluzione $\boxed{x = 2}$

Nota bene: la soluzione accettabile è quella che rende ≥ 0 il termine a destra.

Esempio 5 $\sqrt{x+6} = -x$ Elevo al quadrato:

$$x+6 = x^2 \iff x^2 - x - 6 = 0$$

$S = 1$, $P = -6$: Soluzioni : $x = 3$, $x = -2$

Verifico $x = 3$; $\sqrt{9} = -3$ NON ACCETTABILE

" $x = -2$: $\sqrt{4} = +2$ Ok

Unica soluzione : $\boxed{x = -2}$

— o — o —

DISEQUAZIONI CON RADICI (di indice pari)

Bisogna distinguere 2 casi

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \qquad\qquad \sqrt{A(x)} > B(x)$$

Primo caso : $\sqrt{A(x)} < B(x)$

$$\begin{cases} A(x) < [B(x)]^2 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases}$$

Il problema è che il quadrato conserva l'ordinamento tra numeri positivi e lo inverte tra numeri negativi

Se $A(x)$ è <0, la radice non ha nemmeno senso

Riassumendo:

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x) \iff \begin{cases} A(x) \leq [B(x)]^2 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases}$$

fare i quadrati

se $B(x) < 0$ non è vera

esistenza della $\sqrt{\ }$

In questo modo una disequazione si trasforma in un sistema di 3 disequazioni.

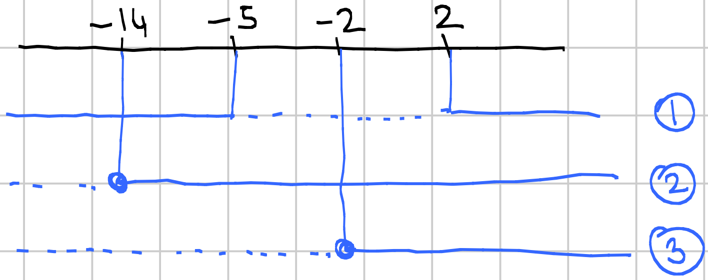
Esempio 1 $\sqrt{x+14} < x+2$ si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} x+14 < (x+2)^2 \\ x+14 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

Fare i quadrati
Esistenza radice (BUROCRAZIA)
Positività del termine a dx (se fosse <0 la diseq. di sicuro non è verificata)

$$\begin{cases} x+14 < x^2+4x+4 \\ x \geq -14 \\ x \geq -2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^2+3x-10 > 0 \\ x \geq -14 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

VALORI ESTERNI a $-5, 2$



Soluz. sistema = zona comune = $(2, +\infty)$ = soluz. diseq. originaria

— o — o —

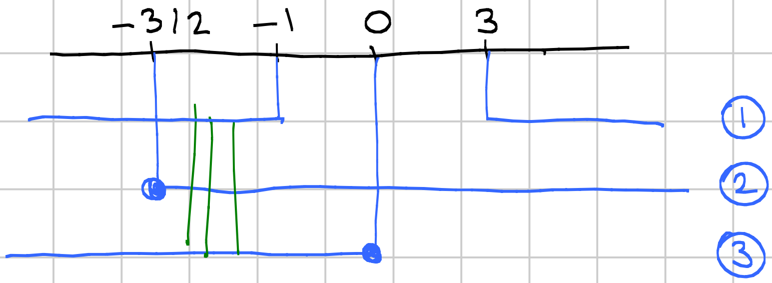
<u>Esempio 2</u> $\sqrt{2x+3} + x < 0 \iff \sqrt{2x+3} < -x$

questa è equiv. al sistema

$$\begin{cases} 2x+3 < x^2 \\ 2x+3 \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases}$$

Fare il quadrato
BUROCRAZIA (esistenza radice)
Positività del termine a dx (altrimenti NO SOL.)

$$\begin{cases} x^2-2x-3 > 0 \\ 2x \geq -3 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Valori esterni a } -1, 3 \\ x \geq -3/2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$



Soluz. diseq. iniziale = soluz. sistema = zona comune = $[-3/2, -1)$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\sqrt{A(x)} > B(x)$

La condizione $A(x) \geq 0$ va comunque imposta.
Se $B(x) < 0$, sicuramente la disuguaglianza è verificata (purché la radice abbia senso).

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Le soluz. di questo sistema sono automaticamente soluz. della diseq. originaria.
Non sono in generale tutte le soluzioni.

Se $A(x) \geq 0$ e $B(x) \geq 0$ posso fare i quadrati e trovare altre soluzioni.

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono soluz. della diseq. originaria

← questa implica la 1ª diseq., cioè $A(x) \geq 0$

In conclusione la disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è equivalente all' UNIONE di 2 sistemi

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Operativamente:
- risolvo il 1° sistema (separatamente)
- risolvo il 2° sistema (separatamente)
- "attacco" le soluz. del 1° e del 2° (sono tutte buone)

<u>Esempio 1</u> $\sqrt{x} > x+2$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x \geq 0} \\ x+2 \geq 0 \\ x > (x+2)^2 \end{cases}$$

si può trascurare

Risolvo il 1° sistema: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < -2 \end{cases}$ SOL: $\emptyset$

Risolvo il 2° sistema: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x > x^2+4x+4 \end{cases}$

$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+3x+4 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2 \\ \Delta = 9-16 < 0 \end{cases}$: soluz. $\emptyset$

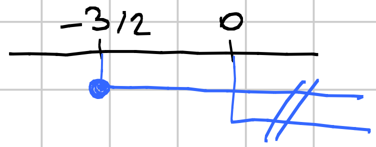
Quindi non ci sono soluz. nemmeno al 2° sistema.

<u>Esempio 2</u> $\sqrt{2x+3} > -x$

$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ -x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \boxed{2x+3 \geq 0} \text{ segue dalla 3ª} \\ -x \geq 0 \\ (2x+3) > x^2 \end{cases}$

Risolvo il 1° sistema:

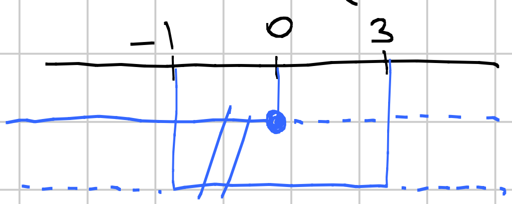
$\begin{cases} 2x \geq -3 \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3/2 \\ x > 0 \end{cases}$



Soluz. 1° sistema: $(0, +\infty)$

Risolvo il 2° sistema:

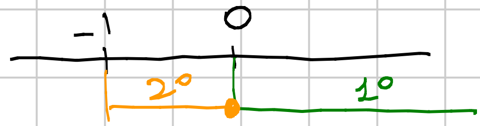
$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 2x+3 > x^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2-2x-3 < 0 \end{cases}$ VAL. INTERNI $(-1, 3)$



Soluz. 2° sistema: $(-1, 0]$

1° sistema: $(0, +\infty)$

2° sistema: $(-1, 0]$



UNENDO le 2 soluzioni ottengo la soluz. della diseq. originaria, cioè $(-1, +\infty)$