EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON ESPONENZIALI E LOGARITMI

$\boxed{1}$ $2^x = 3$ $\qquad x = \log_2 3$

$\boxed{2}$ $(2^x)^2 = 3$ $\qquad$ 1° modo: proprietà delle potenze

$$(2^x)^2 = 2^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = \log_2 3$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\log_2 3 = \log_2\sqrt{3}$$

2° modo: pongo $2^x = y \rightsquigarrow y^2 = 3 \rightsquigarrow y = \pm\sqrt{3}$

$y = \sqrt{3} \rightsquigarrow 2^x = \sqrt{3} \rightsquigarrow x = \log_2\sqrt{3}$

$y = -\sqrt{3} \rightsquigarrow 2^x = -\sqrt{3} \rightsquigarrow$ NULLA perchè una potenza di 2 non è mai ≤ 0.

$\boxed{3}$ $2^{x^2} = 3 \Rightarrow x^2 = \log_2 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\log_2 3}$ SI !!!

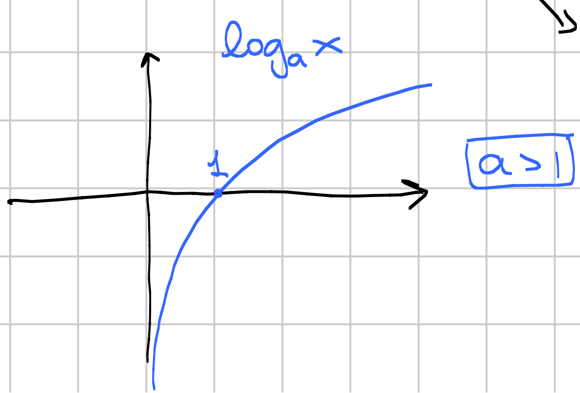
$\boxed{4}$ $3^{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = \log_3 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\log_3 2}$ SI !!

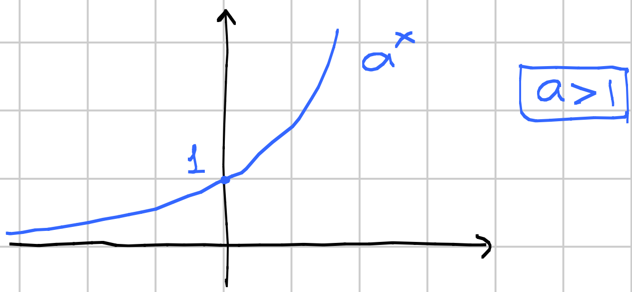
Occhio: $\log_2 3$ e $\log_3 2$ sono quantità > 0, quindi la radice ha senso

— o — o —

<u>Segno di potenze e logaritmi</u> $\quad 2^x, 3^x$ o in generale a^x con base $a > 0$ sono sempre quantità > 0.

$\log_a x$ con $a > 1$
- $\nearrow$ > 0 per $x > 1$
- $\rightarrow$ $= 0$ per $x = 1$
- $\searrow$ < 0 per $0 < x < 1$
- $\searrow$ NON DEFINITO PER $x \leq 0$





5 $4\cdot 2^{x^2}=8^x$ scrivo tutto come potenze di 2:

$2^2\cdot 2^{x^2}=(2^3)^x$; $2^{2+x^2}=2^{3x}$ (proprietà delle potenze)

Osservazione generale: se ho

$$\boxed{2^{A(x)}=2^{B(x)} \iff A(x)=B(x)}$$ SI PUÒ FARE

$2^{2+x^2}=2^{3x} \iff 2+x^2=3x \iff x^2-3x+2=0$

$P=2,\ S=3 \Rightarrow$ soluzioni $x=1$ e $x=2$

6 $3\cdot 2^{x^2}=1$; $2^{x^2}=\frac{1}{3}$; $x^2=\log_2\frac{1}{3}$

$x=\pm\sqrt{\log_2\frac{1}{3}}$ NO!!!! $\log_2\frac{1}{3}<0$, quindi l'eq.

è $x^2=$ roba negativa $\Rightarrow$ NESSUNA SOLUZIONE

7 $4^x-2^{x+2}+3=0$, $2^{2x}-2^{x+2}+3=0$

$2^{2x}=[2^x]^2$; $2^{x+2}=2^x\cdot 2^2=4\cdot 2^x$

Pongo $2^x=y$. L'equazione era $[2^x]^2-4\cdot 2^x+3=0$

e diventa quindi $y^2-4y+3=0$. Risolvo in y: $y=\begin{cases}1\\3\end{cases}$

$y=1 \rightsquigarrow 2^x=1 \rightsquigarrow x=0$

$y=3 \rightsquigarrow 2^x=3 \rightsquigarrow x=\log_2 3$

8 $2^x=3^x$ 1° modo: divido per 3^x: $\frac{2^x}{3^x}=1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x=1 \iff x=0$

2° modo: faccio a dx e sx il log in base 7: $\log_7 2^x=\log_7 3^x$

$x\log_7 2=x\log_7 3$, $\underbrace{(\log_7 2-\log_7 3)}_{\neq 0}x=0 \Rightarrow x=0$

$\boxed{9}$ $\log_2(x-1) = 5$

In generale conviene portarsi nella forma

$$\boxed{\log_a A(x) = \log_a B(x) \iff A(x) = B(x)}$$

Si può FARE, ma bisogna imporre $A(x)>0$ (o $B(x)>0$)
(cioè bisogna fare la verifica alla fine)

$\log_2(x-1) = 5\log_2 2$; $\cancel{\log_2}(x-1) = \cancel{\log_2} 2^5$

$x-1 = 2^5 = 32 \Rightarrow x = 33$ (non c'è da imporre nulla perché $2^5>0$)

$\boxed{10}$ $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3 = 3\log_2 2 = \log_2 8$

$\cancel{\log_2}[(x-1)(x+1)] = \cancel{\log_2} 8$ ($8>0 \Rightarrow$ nulla da imporre)

$(x-1)(x+1) = 8$, $x^2-1=8$, $x^2=9$, $x=\pm 3$
Sostituendo $x=-3$ nell'eq. iniziale si vede che non va bene; $x=3$ invece sì.

$\boxed{11}$ $3\log_3 x + 2\log_3 x^2 = 21$; $3\log_3 x + 4\log_3 x = 21$
$7\log_3 x = 21 \iff \log_3 x = 3 = 3\log_3 3 = \log_3 27$
$\iff x = 27$

— o — o —

$\boxed{12}$ $(\log_2(x+2))^2 + 3\log_2(x+2) = 4$. Pongo $y = \log_2(x+2)$

L'equazione diventa : $y^2+3y=4 \iff y^2+3y-4=0$

$P=-4$, $S=-3 \Rightarrow$ soluzioni $y=-4$, $y=1$. Torno in x
$y=1 \rightsquigarrow \log_2(x+2) = 1 = \log_2 2 \Rightarrow x+2=2 \Rightarrow x=0$
$y=-4 \rightsquigarrow \log_2(x+2) = -4 = -4\log_2 2 = \log_2 \frac{1}{16} \Rightarrow x+2 = \frac{1}{16}$ ...

DISEQUAZIONI — Teoria generale

$$\boxed{2^{A(x)} > 2^{B(x)} \iff A(x) > B(x)}$$

SI PUÒ FARE PER TUTTE LE BASI > 1 (la base deve essere la stessa a dx e sx)

base $a>1$

$$\log_a A(x) > \log_a B(x) \iff A(x) > B(x) \boxed{>0}$$

SI PUÒ FARE CON TUTTE LE BASI $a>1$, ma bisogna imporre $B(x)>0$ affinché il log abbia senso.

$\boxed{1}$ $3^{x^2} < 9$; $\cancel{3}^{x^2} < \cancel{3}^2$; $x^2 < 2$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$\boxed{2}$ $3^{x+3} > 3$; $3^{x+3} > 3^1$; $x+3>1$, $x>-2$

$(-2, +\infty)$

$\boxed{3}$ $\log_3 (x+3) > 0$

$\log_3 (x+3) > \log_3 1 \iff x+3 > 1 \boxed{>0}$

Banale

$x+3>1$, quindi $x>-2$ $\quad (-2, +\infty)$

④ $\log_2 (2x-4) \le 3 \log_2 2$; $\log_2 (2x-4) \le \log_2 8$

$\iff 0 < 2x-4 \le 8$

condizione di esistenza del log.

perché c'era nell'equazione

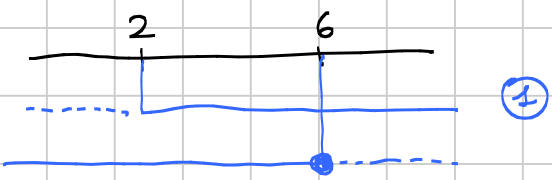
Le 2 disequazioni $2x-4>0$ ① devono essere vere

$2x-4 \le 8$ ② contemporaneamente

$\Rightarrow$ si tratta di un SISTEMA

① $2x>4 \iff x>2$

② $2x-4 \le 8 \iff 2x \le 12 \iff x \le 6$



ZONA COMUNE: $2 < x \le 6$ $\quad (2, 6]$

$\boxed{5}$ $2^{x+3} \leq 4^{x} \iff 2^{x+3} \leq 2^{2x} \iff x+3 \leq 2x$

$\iff x \geq 3$

$\boxed{6}$ $\log_2 (2x-4) \leq 0 \; ; \; \log_2 (2x-4) \leq \log_2 1$

$\iff 0 < 2x-4 \leq 1$

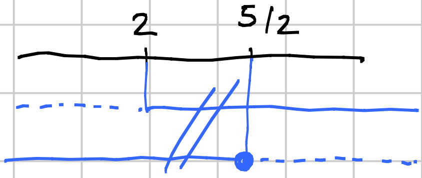
cond. esistenza

ottenuto togliendo i log

$$\begin{cases} 2x-4>0 & (1) \\ 2x-4 \leq 1 & (2) \end{cases}$$

(1) $2x > 4$, $x > 2$

(2) $2x - 4 \leq 1$, $2x \leq 5$, $x \leq \frac{5}{2}$



zona comune: $(2, 5/2]$ $\qquad 2 < x \leq \frac{5}{2}$

— o — o —

$\boxed{7}$ $\log_2 (2x+3) < 2 \; ; \; \log_2 (2x+3) < \log_2 4$

$0 < 2x+3 < 4$

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ 2x+3<4 \end{cases} ; \begin{cases} 2x>-3 \\ 2x<1 \end{cases} ; \begin{cases} x>-3/2 \\ x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione: $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ $\qquad \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

— o — o —

$\boxed{8}$ $2^{x^2+1} = 8 \qquad 2^{x^2+1} = 2^3$

$x^2+1 = 3 \qquad x^2 = 2 \qquad x = \pm\sqrt{2}$

$\boxed{8'}$ $2^{x^2+1} > 8 \qquad 2^{x^2+1} > 2^3 \qquad x^2+1 > 3$

$x^2 > 2 \iff (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$