ESPONENZIALI E LOGARITMI

Titolo nota 18/09/2008

$a^b = c$ Se conosco b e c, come trovo a?
Elevo tutto alla $\frac{1}{b}$

$$(a^b)^{\frac{1}{b}} = (c)^{\frac{1}{b}} \Rightarrow a = c^{\frac{1}{b}}$$

Se conosco a e c, come trovo b? Con il logaritmo.

Per definizione: $\boxed{b = \log_a c}$ Potenza alla quale elevare il numero a per ottenere il numero c

<u>Osservazioni</u>

1. Serve $c > 0$ e $a > 0$ e $a \neq 1$
2. Date le condizioni di cui al punto precedente su a e c, esiste sempre un <u>unico</u> numero b tale che $a^b = c$

<u>Esempi</u> $2^x = 8$ $x = \log_2 8 = 3$

$10^x = 100$ $x = \log_{10} 100 = 2$ $\log_{10} c = \operatorname{Log} c$

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$ sto pensando a $3^x = \frac{1}{3}$

$\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ sto pensando a $4^x = \frac{1}{2}$

$$4^{-\frac{1}{2}} = (4^{-1})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$ $2^x = \frac{1}{4}$ $x = -2$

$\log_{1/2} 4 = -2$ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$; $\frac{1}{2^x} = 4$; $2^x = \frac{1}{4}$

Proprietà del logaritmo

$\boxed{1}$ $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\boxed{2}$ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\boxed{3}$ $\log_a x^y = y \log_a x$

$\boxed{5}$ $\log_a (x \pm y)$
Nulla di furbo

$\boxed{6}$ $\log_a x \cdot \log_a y$
Nulla di furbo

$\boxed{4}$ Formula di cambio di base: permette di calcolare un log in base a sapendo fare solo log in base b

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Come si ricava il cambio di base:

1. voglio calcolare $\boxed{z = \log_a x}$, cioè risolvere $a^z = x$;
2. so fare solo: log in base b;
3. prendo $\log_b$ a dx e sx: ottengo $\log_b a^z = \log_b x$
4. Applico la proprietà $\boxed{3}$ dei log: $z \log_b a = \log_b x$
5. Ricavo $\boxed{z = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$

— o — o —

Giustificazione formula 1: $\underset{\substack{\shortparallel \\ k}}{\log_a (x \cdot y)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ m}}{\log_a x} + \underset{\substack{\shortparallel \\ n}}{\log_a y}$

$\log_a x = m \iff a^m = x$
$\log_a y = n \iff a^n = y$ moltiplicando ottengo

$$a^m \cdot a^n = x \cdot y$$
$$a^{m+n} = x \cdot y \iff m+n = \log_a (x \cdot y)$$

<u>Esercizi</u> $\boxed{1}$ $\log_2 16 = 4$ $\quad 2^x = 16$; $\boxed{2}$ $\log_2 a = 3$ $\quad a = 8$

$\log_2 a = 3$; $\log_2 a = 3 \underbrace{\boxed{\log_2 2}}_{= 1}$ $\quad$ In generale: $\log_a a = 1$

$\log_2 a = 3 \log_2 2 = \log_2 2^3$; $\cancel{\log_2} a = \cancel{\log_2} 2^3$, $a = 2^3$

— o — o —

$\boxed{3}$ $\log_3 2^4 = a \log_3 2$ $\quad a = 4$

$\boxed{4}$ $\log_3 \sqrt{2} = a \log_3 2$; $\log_3 \sqrt{2} = \log_3 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 2$

$\boxed{5}$ $\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 64 = 3 + 4 + 6 = 13$

oppure:

$\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 (2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^6) = \log_2 2^{3+4+6}$

propr. potenze

$= \log_2 2^{13} = 13 \overbrace{\log_2 2}^{1} = 13$

$\boxed{6}$ $\log_3 20 + \log_3 4 = \log_3 (20 \cdot 4) = \log_3 80$

$\boxed{7}$ $\log_3 20 - \log_3 4 = \log_3 \frac{20}{4} = \log_3 5$

$\boxed{8}$ $\log_5 3 - \log_5 2 = \log_5 \frac{3}{2}$

$\boxed{9}$ $\log_2 4 \cdot \log_2 8 = \log_2 a$

$\log_2 4 \cdot \log_2 8 = 2 \cdot 3 = 6 = \log_2 a$, ma $6 = \log_2 2^6$
$= \log_2 64$

$\boxed{10}$ $\log_2 2^a = 9$; $\log_2 2^a = 9 \log_2 2$

$\log_2 2^a = \log_2 2^9 \Rightarrow a = 9$

$\boxed{11}$ $\log_2 4^a = 9$; $\log_2 2^{2a} = 9$; $\log_2 2^{2a} = 9 \log_2 2$
$= \log_2 2^9$

$$\log_2 2^{2a} = \log_2 2^9 \Rightarrow 2a = 9 \Rightarrow a = 9/2$$

Modo alternativo per esercizi $\boxed{10}$ e $\boxed{11}$

$\boxed{10'}$ $\log_2 2^a = 9 \Rightarrow a \underbrace{\log_2 2}_{=1} = 9 \Rightarrow a = 9$

$\boxed{11'}$ $\log_2 4^a = 9 \Rightarrow a \underbrace{\log_2 4}_{=2} = 9 \Rightarrow 2a = 9 \Rightarrow a = 9/2$

$\boxed{12}$ $2^{\log_2 a} = 9$ Faccio a dx e sx il $\log_2$

$$\log_2 \left(2^{\boxed{\log_2 a}} \right) = \log_2 9$$

$$\log_2 a \cdot \underbrace{\cancel{\log_2 2}}_{=1} = \log_2 9 \Rightarrow \log_2 a = \log_2 9 \Rightarrow a = 9$$

$\boxed{13}$ $\log_a 4 = 2$ L'incognita alla base è fastidiosa

Con la formula di cambio di base posso passare in base 2

$$\log_a 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 a} = \frac{2}{\log_2 a}$$ L'equazione diventa

$$\log_a 4 = 2 \rightsquigarrow \frac{2}{\log_2 a} = 2 \Rightarrow 2 = 2 \log_2 a$$

$$\Rightarrow \log_2 a = 1 \Rightarrow a = 2$$

—o—o—

$\boxed{14}$ $\log_3 9 = \log_2 a$; $2 = \log_2 a \Rightarrow a = 4$

$\boxed{15}$ $\log_3 9 = \log_a 25$; $2 = \log_a 25 \Rightarrow a = 5$

$$\log_a 25 = \frac{\log_5 25}{\log_5 a} = \frac{2}{\log_5 a}$$ e da qui come esercizio precedente

$\boxed{16}$ $\log_3 \sqrt{2} = a \log_3 4$; $\log_3 2^{\frac{1}{2}} = a \log_3 2^2$

$$\frac{1}{2} \cancel{\log_3} 2 = 2a \cancel{\log_3} 2 \Rightarrow 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

17 $\log_5 3^{1000} = \log_{25} a^{1000}$

$\log_5 3^{1000} = 1000 \log_5 3$

$\log_{25} a^{1000} = 1000 \log_{25} a = 1000 \dfrac{\log_5 a}{\boxed{\log_5 25}} = 500 \log_5 a$

$\log_5 25 = 2$

L'equazione è diventata:

$\cancel{1000}^{2} \log_5 3 = \cancel{500} \log_5 a \; ; \; 2 \log_5 3 = \log_5 a$

$\log_5 3^2 = \log_5 a \Rightarrow a = 9$

18 $\log_{125} 64 = \log_5 a \; ; \; \log_{125} 64 = \dfrac{\log_5 64}{\log_5 125} = \dfrac{\log_5 64}{3}$

Quindi l'eq. diventa:

$\boxed{\log_5 a} = \dfrac{1}{3} \log_5 64 = \log_5 64^{1/3} = \log_5 \sqrt[3]{64} = \boxed{\log_5 4}$

$\Rightarrow a = 4$

— o — o —

19 $\log_7 2^{1000} = \log_{49} 2^a \; ; \; \log_7 2^{1000} = 1000 \cdot \log_7 2$

$\log_{49} 2^a = a \log_{49} 2 = a \dfrac{\log_7 2}{\log_7 49} = \dfrac{a}{2} \log_7 2$

Quindi l'eq. diventa: $1000 \cancel{\log_7} 2 = \dfrac{a}{2} \cancel{\log_7} 2 \Rightarrow a = 2000$

— o — o —

20 $\log_7 13 \cdot \log_5 7 = \log_5 a \; ; \; \log_7 13 = \dfrac{\log_5 13}{\log_5 7}$

$\dfrac{\log_5 13}{\cancel{\log_5 7}} \cdot \cancel{\log_5 7} = \log_5 a \Rightarrow a = 13$

— o — o —

21 $\log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 a$ in base 2

$\dfrac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \dfrac{\log_2 49}{\log_2 8} = \log_2 a$

$\log_2 49 = \log_2 7^2$
$= 2 \log_2 7$

$$\frac{\log_2 3}{\cancel{\log_2 7}} \cdot \frac{2\cancel{\log_2 7}}{3} = \log_2 a$$

$$\frac{2}{3}\log_2 3 = \log_2 a \quad ; \quad \log_2 3^{\frac{2}{3}} = \log_2 a$$

$$\Rightarrow a = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$$

— o —

22 $2^{\log_4 a} = 9$

$\boxed{\text{Se fosse } 2^{\log_4 a} = 8 = 2^3}$

Spezzare il problema in 2 problemi.
Pongo $x = \log_4 a$. L'equazione diventa $2^x = 9$,
quindi $x = \log_2 9$. Ora resta da risolvere

$$\boxed{\log_2 9} = \log_4 a = \frac{\log_2 a}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2 a = \boxed{\log_2 \sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a} = 9 \Rightarrow a = 81$$

— o — o —

23 $2^{\log_a 3} = 4$ Pongo $x = \log_a 3$

$$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Resta da risolvere $2 = \log_a 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 a}$

$$2 = \frac{1}{\log_3 a} \Rightarrow \log_3 a = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_3 3$$

$$= \log_3 \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{3}$$