DISEQUAZIONI CON PRODOTTI E QUOZIENTI

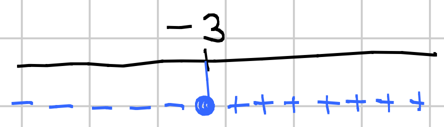
Titolo nota 17/09/2008

$\boxed{1}$ $(x-1)(x+3) \quad 0$

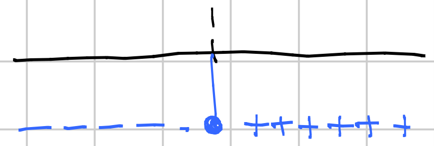
Voglio determinare il segno di $(x-1)(x+3)$

Studio separatamente i 2 FATTORI

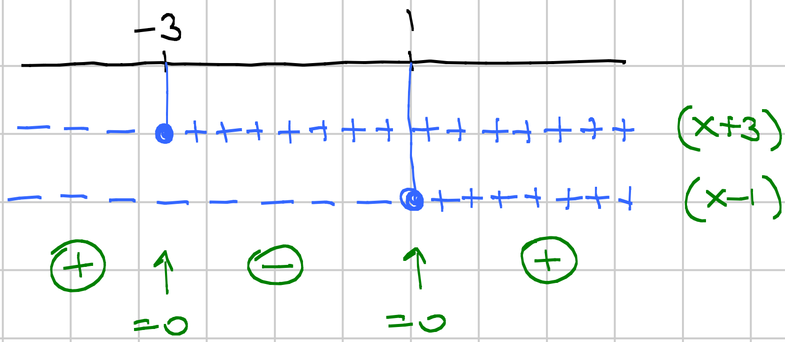
I
$$\begin{cases} x+3>0 & \text{per } x>-3 \\ x+3=0 & \text{per } x=-3 \\ x+3<0 & \text{per } x<-3 \end{cases}$$



II
$$\begin{cases} x-1>0 & \text{per } x>1 \\ x-1=0 & \text{per } x=1 \\ x-1<0 & \text{per } x<1 \end{cases}$$



Metto insieme i 2 studi



segno di $(x+3)(x-1)$

Ora posso considerare il verso della disequazione data

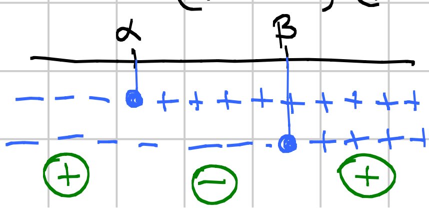
$(x-1)(x+3)>0$	$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$
$(x-1)(x+3)\geq 0$	$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$
$(x-1)(x+3)\leq 0$	$[-3,1]$
$(x-1)(x+3)<0$	$(-3,1)$

Nota bene: $(x-1)(x+3)>0$ è in particolare una diseq. di 2° grado: $x^2+3x-x-3>0$, $x^2+2x-3>0$

Radici: $x=-3$, $x=1$ VALORI ESTERNI

In generale se la diseq. di 2° grado è

$(x-\alpha)(x-\beta) \;\square\; 0$ con $\alpha<\beta$



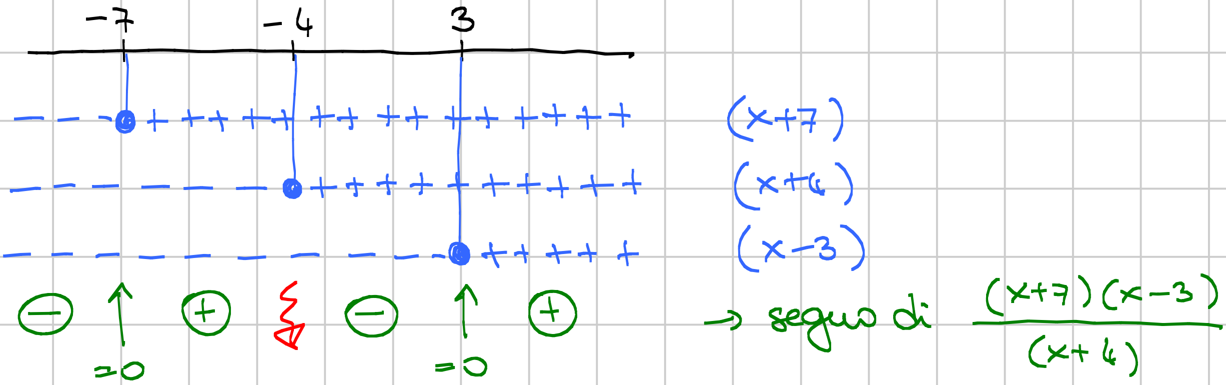
Esempio 2 $\quad \dfrac{(x+7)(x-3)}{x+4} \ \boxed{} \ 0$

Considero separatamente i fattori $x+7$, $x-3$, $x+4$

$x+7>0$ per $x>-7$

$x+7=0$ per $x=-7$ $\qquad$ analogamente per gli altri

$x+7<0$ per $x<-7$



$\boxed{\text{Ora}}$ posso guardare i versi nella diseq. di partenza

$\dfrac{(x+7)(x-3)}{x+4}<0 \qquad (-\infty,-7)\cup(-4,3)$

$\dfrac{(x+7)(x-3)}{x+4}\le 0 \qquad (-\infty,-7]\cup(-4,3]$ ESCLUSO

$\dfrac{(x+7)(x-3)}{x+4}>0 \qquad (-7,-4)\cup(3,+\infty)$

$\dfrac{(x+7)(x-3)}{x+4}\ge 0 \qquad [-7,-4)\cup[3,+\infty)$ ESCLUSO

— o — o —

Esempio 3 $\quad \dfrac{1}{x}>4$ $\qquad$ $\boxed{1>4x\ ,\ \ 4x<1,\ \ x<\frac{1}{4}}$ NO! NO!

Non si può moltiplicare per x, perché non se ne conosce il segno

Porto tutto a sx

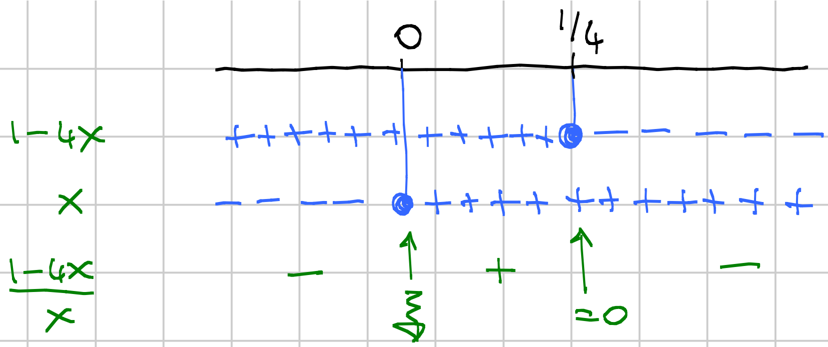
$\dfrac{1}{x}-4>0$

$\dfrac{1-4x}{x}>0$ $\qquad$ Diseq. con quoziente. Studio separatamente i 2 termini

$1-4x>0$ se $4x<1$, cioè $x<\frac{1}{4}$

$1-4x=0$ se $4x=1$, " $x=\frac{1}{4}$

$1-4x<0$ " $4x>1$ " $x>\frac{1}{4}$



Ora guardo il verso nella diseq. iniziale

$\frac{1-4x}{x} > 0 \qquad (0, \frac{1}{4}) \qquad 0 < x < \frac{1}{4}$

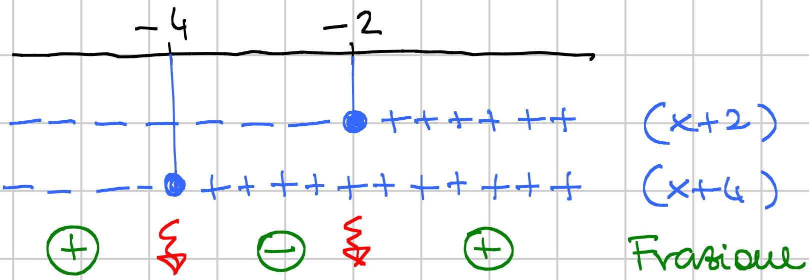
Esempio 4 $\qquad \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$

Non pensare nemmeno di moltiplicare "in croce"!!!

Tutto a sx: $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} > 0, \quad \frac{(x+1)(x+4)-(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+4)} > 0$

$\frac{\cancel{x^2}+\cancel{4x}+\cancel{x}+4-\cancel{x^2}-3\cancel{x}-2\cancel{x}-6}{(x+2)(x+4)} > 0 \qquad \frac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0$

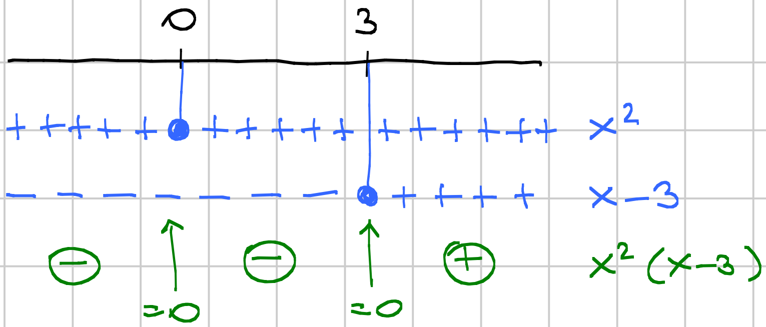
$\frac{2}{(x+2)(x+4)} < 0$



Frazione < 0 per $-4 < x < -2 \qquad (-4, -2)$

Se fosse stato: Frazione ≤ 0, la risposta era la stessa

Esempio 5 $\qquad x^2(x-3) \geq 0$. Studio separatamente x^2 e $x-3$



$x^2(x-3) > 0 \qquad (3, +\infty)$

$x^2(x-3) < 0$

$(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

NON COMPRENDE $x = 0$

$x^2(x-3) \leq 0 \qquad (-\infty, 3]$

$x^2(x-3) \geq 0 \qquad \{0\} \cup [3, +\infty)$

0 isolato

Esempio 6 $\quad x^4 - 3x^2 + 4 \ \square \ 0$ $\qquad$ Idea: fattorizzare, quindi risolvere come prodotto

$t = x^2 \qquad t^2 - 3t + 4 \qquad$ Radici $\quad t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2}$

Non ci sono radici in t, quindi in particolare non ci sono radici in x. Inoltre l'espressione in t è sempre >0, quindi anche in x è sempre >0.

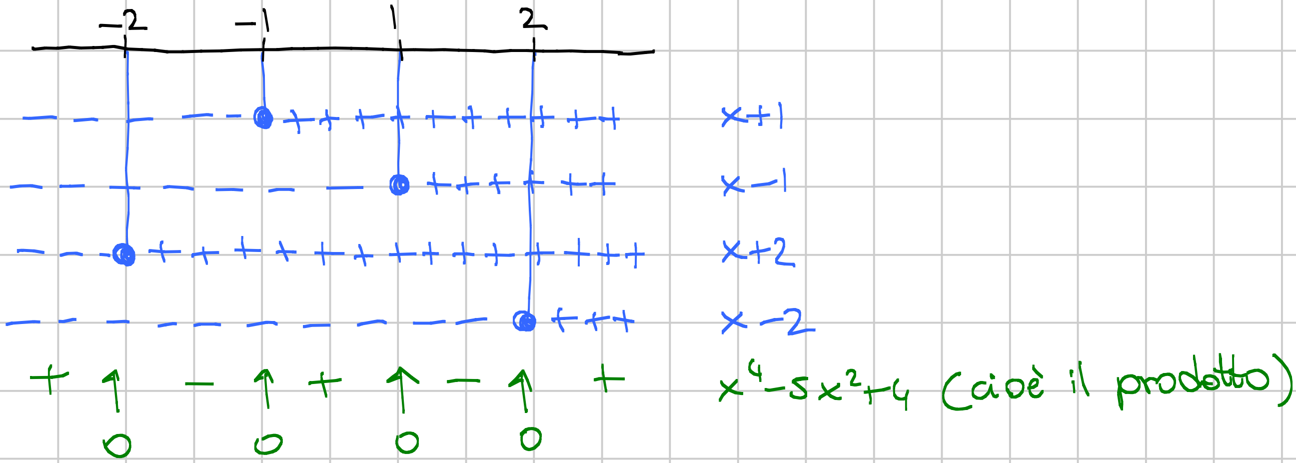
$x^4 - 3x^2 + 4 > 0$ $\quad$ sempre $\quad \mathbb{R}$

Esempio 7 $\quad x^4 - 5x^2 + 4 \ \square \ 0 \qquad t = x^2 \qquad t^2 - 5t + 4$

$(S = 5,\ P = 4)$ $\quad$ Radici: $t = 1,\ t = 4 \rightarrow$ Fattorizzazione:

$$t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$$
$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2-1)(x^2-4)$$
$$= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

Studio separatamente i 4 termini:



$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0 \qquad [-2, -1] \cup [1, 2]$

$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0 \qquad (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$

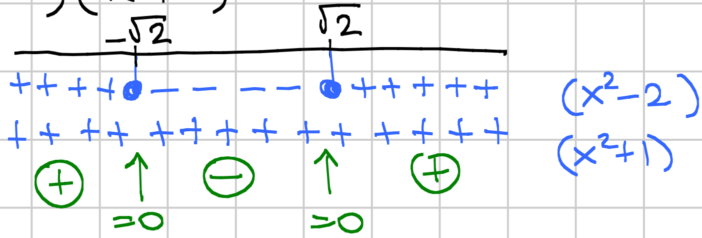
Esempio 8 $\quad x^4 - x^2 - 2 \qquad t = x^2 \qquad t^2 - t - 2 \qquad (S = 1,\ P = -2)$

Radici: $t = 2,\ t = -1$ $\qquad$ Fattorizzazione

$$t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1)$$
$$x^4 - x^2 - 2 = (x^2-2)(x^2+1)$$

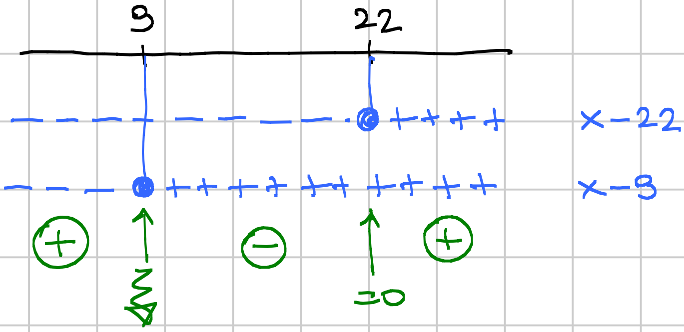
$x^4 - x^2 - 2 < 0$

$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$



Esempio 9 $\quad \dfrac{x+4}{x-9} \leq 2 \qquad$ Tutto a sx $\quad \dfrac{x+4}{x-9} - 2 \leq 0$

$$\frac{x+4-2x+18}{x-9} \leq 0 \qquad \frac{-x+22}{x-9} \leq 0 \qquad \frac{x-22}{x-9} \geq 0$$



Quindi $\dfrac{x-22}{x-9} \geq 0$ per

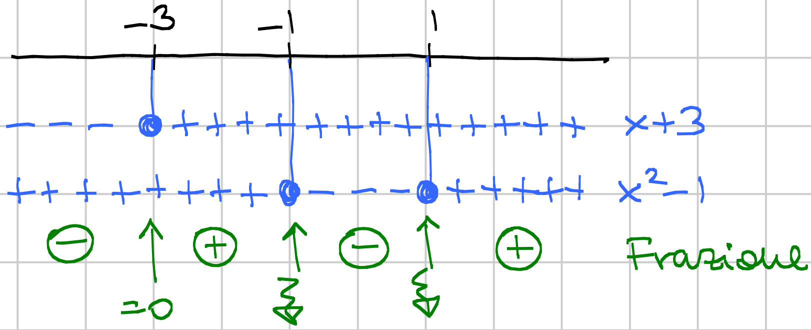
$(-\infty, -9) \cup [22, +\infty)$

Esempio 10 $\begin{cases} x^2 \leq 4 & (1) \\ \dfrac{x+3}{x^2-1} \leq 0 & (2) \end{cases}$ $\qquad x^2 - 4 \leq 0 \qquad [-2, 2]$

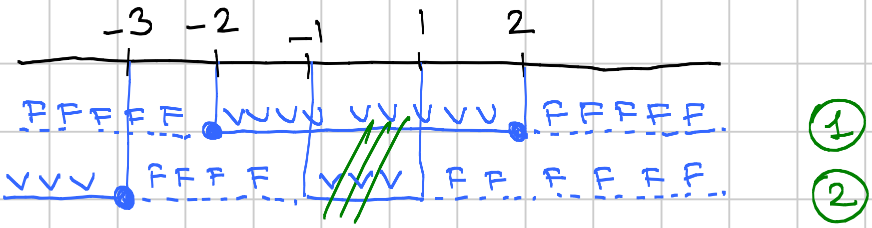
Risolvo disequazione (2)

Soluzione diseq. (2) :

$(-\infty, -3] \cup (-1, 1)$



Metto insieme le soluzioni della (1) e della (2)



Soluzione sistema: ZONA COMUNE, cioè $(-1, 1)$.