Ripasso EQUAZIONI POLINOMIALI

Titolo nota 17/09/2008

① I o II grado → risolve facilmente

② Biquadratica, bicubica, ... : si pone $t = x^2$, $t = x^3$, $t = x^4$, ... e diventa di II grado. Si risolve in t e poi si torna in x

③ Altri casi in cui è di grado > II : si spera di trovare una radice razionale $\frac{m}{n}$. Se si trova poi si divide per $x - \frac{m}{n}$ e si scende di grado

④ Come si trova una radice razionale? Provando tutte le frazioni $\frac{m}{n}$ in cui
- m è un divisore del termine noto
- n è un divisore del coeff. del termine di grado max

Queste frazioni sono un numero finito.

⑤ Se non c'è la radice razionale, sono guai.

⑥ Trovare le soluzioni equivale a fattorizzare il polinomio. Se a, b, c sono radici di un polinomio, allora il polinomio è divisibile per $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Esempio 1 $\quad x^6 + 5x^3 + 6 = 0 \quad$ Bicubica $t = x^3$

$t^2 + 5t + 6 = 0 \quad$ (Somma: -5, Prodotto: 6)

Radici in t : $\quad t = -2$, $t = -3$

Ritorno in x :

$$\left.\begin{aligned} x^3 &= -2 \longrightarrow x = -\sqrt[3]{2} \\ x^3 &= -3 \longrightarrow x = -\sqrt[3]{3} \end{aligned}\right\} \text{2 soluzioni}$$

In termini di scomposizioni:

$$t^2 + 5t + 6 = (t+2)(t+3)$$

$$x^6 + 5x^3 + 6 = (x^3+2)(x^3+3)$$

$$x^3 + 2 = (x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}\,x + \sqrt[3]{4})$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) \qquad A = x,\ B = \sqrt[3]{2}$$

$$x^3 + 3 = (x + \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}\,x + \sqrt[3]{9}) \qquad A = x,\ B = \sqrt[3]{3}$$

Esempio 2 $\quad (x^4+1)(x^2+2x)=0 \iff \underset{\downarrow \atop x=0}{x}\,\underbrace{(x+2)}_{x=-2}\,\underbrace{(x^4+1)}_{\text{NULLA}}=0$

$\rightarrow$ 2 soluzioni $\quad x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

Esempio 3 $\quad 3x^3-5x^2+7x+3=0$

Cerco una radice del tipo $\frac{m}{n}$, in cui m divide 3 ed n divide 3

$\Rightarrow$ Le possibili radici razionali sono $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{3}$

± 1 non vanno bene. Provo ± 3: $\quad \pm 81 - 45 \pm 21 + 3 \overset{?}{=} 0 \quad$ NO

Provo $\pm \frac{1}{3}$: $\quad \pm \frac{1}{9} - \frac{5}{9} \pm \frac{7}{3} + 3 \overset{?}{=} 0$

con il $+$: $\quad \frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{7}{3} + 3 = \frac{1-5+21+27}{9} \neq 0$

con il $-$: $\quad = \frac{-1-5-21+27}{9} = 0$

Quindi $x=-\frac{1}{3}$ è una radice del polinomio. Quindi il polinomio è divisibile per $x+\frac{1}{3}$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -5x^2 & +7x & +3 & x+\frac{1}{3} \\ \cline{5-5}
-3x^3 & -x^2 & & & 3x^2-6x+9 \\ \cline{1-4}
// & -6x^2 & +7x & +3 & \\
 & +6x^2 & +2x & & \\ \cline{2-4}
 & // & 9x & +3 & \\
 & & -9x & -3 & \\ \cline{3-4}
 & & // & // &
\end{array}
$$

Quindi:

$$3x^3-5x^2+7x+3 = \left(x+\frac{1}{3}\right)3\left(x^2-2x+3\right)$$
$$= (3x+1)(x^2-2x+3)$$

Le soluzioni dell'eq. originaria sono

- $x = -\frac{1}{3}$
- le radici di x^2-2x+3: $\quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} \quad$ $\Delta < 0$ nessuna soluz. reale

$\Rightarrow$ l'unica soluz. reale è $x = -\frac{1}{3}$

DISEQUAZIONI

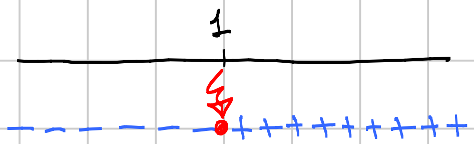
Una disequazione si presenta nella forma $f(x) \geq 0$ $f(x) \leq 0$
$f(x) > 0$ $f(x) < 0$

Risolvere la disequazione significa sostanzialmente studiare il segno della funzione $f(x)$, cioè dividere i numeri x in 4 gruppi:

- gli x per cui $f(x) > 0$
- gli x per cui $f(x) = 0$
- " " " " $f(x) < 0$
- gli x per cui $f(x)$ NON È DEFINITA.

<u>Esempio</u> $f(x) = \frac{1}{x-1}$

$f(x) > 0$ per $x > 1$
$f(x) = 0$ MAI
$f(x) < 0$ per $x < 1$
$f(x)$ non è definita per $x = 1$



<u>Disequazioni di I grado</u>

$\boxed{1}$ $3x \geq 6$, $x \geq 2$ (moltiplico dx e sx per $\frac{1}{3}$)

$\boxed{2}$ $3x \geq -6$, $x \geq -2$ (come sopra)

$\boxed{3}$ $-3x \geq 6$, $x \leq -2$ (moltiplico dx e sx per $-\frac{1}{3}$, ma INVERTO IL VERSO DELLA DISEQUAZ.)

ACHTUNG! Per le equazioni possiamo moltiplicare dx e sx per una stessa quantità purchè $\neq 0$

Nelle diseq. possiamo moltiplicare IMPUNEMENTE per roba > 0, e moltiplicare per roba < 0 PUR DI GIRARE il VERSO.

$\boxed{4}$ $-3x < -6$ — Moltiplico per -1 (quindi cambio verso)

$3x > 6$ — Moltiplico per $\frac{1}{3}$ (quindi conservo il verso)

$x > 2$

$\boxed{5}$ $3(2x+5) > -7x+3$ — Faccio un po' di conti

$6x+15 > -7x+3$ — Sposto $dx \leftrightarrow sx$

$13x > -12$ — Moltiplico per $\frac{1}{13}$

$x > -\frac{12}{13}$

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

$$\begin{cases} 2x+3 > 3x & (1) \\ x-2 > 7 & (2) \end{cases}$$

Risolvere il sistema vuol dire trovare gli x per cui la (1) e la (2) sono verificate contemporaneamente. Come si risolve?

- Risolvo (1) e (2) separatamente
- Considero la "zona comune"

(1) $2x+3 > 3x$, $3 > x$, $x < 3$ (2) $x-2 > 7$, $x > 9$

Rappresento le 2 soluzioni in uno schema

Non c'è zona comune, quindi il sistema non ha soluzioni (la soluzione del sistema è $\emptyset$)

—o—o—

$$\begin{cases} 3x > 5 & (1) \\ 2x-4 > x & (2) \\ 2x < 40 & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 5/3 \\ x > 4 \\ x < 20 \end{cases}$$

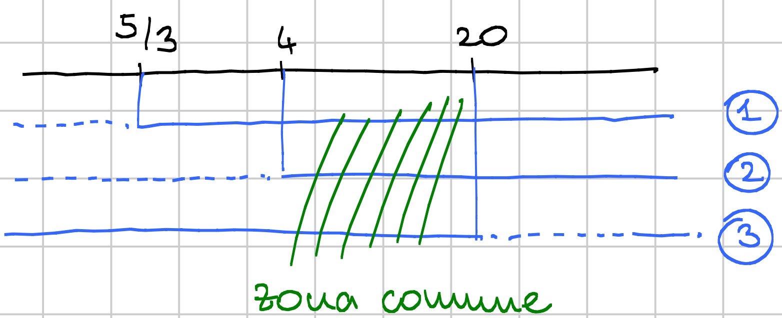
Soluzione sistema:

$4 < x < 20$

$\underbrace{(4, 20)}$

intervallo con estremi 4 e 20 (estremi esclusi)

$]4, 20[$



DISEQUAZIONI DI II GRADO $\quad ax^2+bx+c \; \boxed{} \; 0$

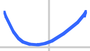
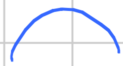
$>$, $\geq$, $<$, $\leq$

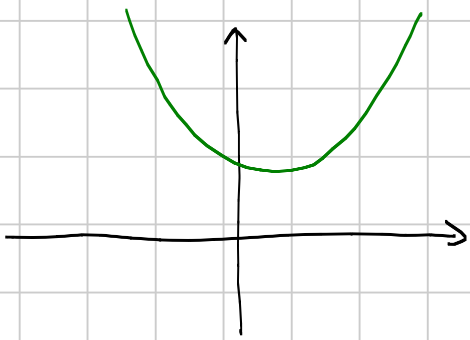
$\boxed{1^a \text{ cosa}}$: si può sempre fare in modo che $a>0$ (se è negativo cambio i segni e inverto i versi)

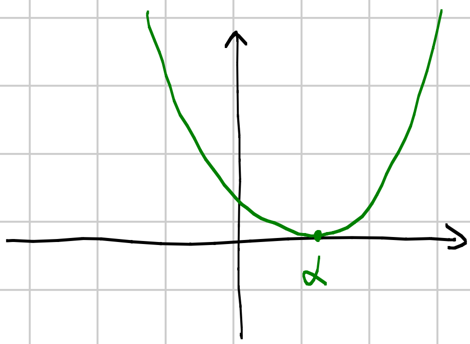
$\boxed{2^a \text{ cosa}}$: guardo il segno di $\Delta = b^2-4ac$. Ho 3 casi (sempre assumo $a>0$)

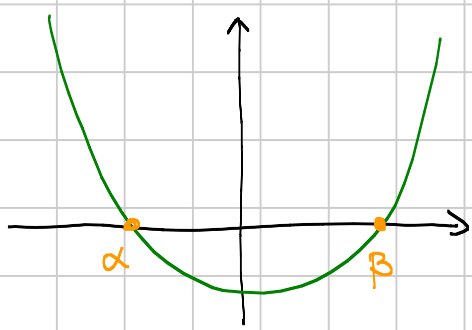
- se $\Delta<0$ il polinomio è sempre >0;
- se $\Delta>0$ il polinomio ha 2 radici reali $\alpha<\beta$ ed è negativo per valori interni all'intervallo (α,β) ed è positivo per valori esterni
- se $\Delta=0$ il polinomio ha un'unica radice reale $x=\alpha$ ed è positivo per tutti i valori $x \neq \alpha$

Interpretazione grafica $\quad y=ax^2+bx+c$ nel piano cartesiano rappresenta una parabola

$a>0 \rightsquigarrow$ parabola , $a<0 \rightsquigarrow$ parabola 







$\Delta<0$: nessuna intersezione con asse x. Quindi "y è sempre >0" Quindi il pol. di II grado assume solo valori positivi

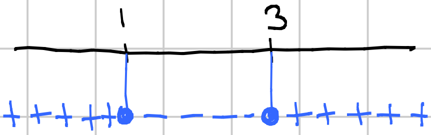
$\Delta=0$: una sola radice $x=\alpha$
- per $x=\alpha$ il pol. si annulla
- per $x\neq\alpha$ il pol. è >0

corretto a posteriori

$\Delta>0$: 2 radici $x=\alpha$ e $x=\beta$
- per $x\in(\alpha,\beta)$ "VALORI INTERNI" il pol. è <0
- per VALORI ESTERNI è >0

$\boxed{1}$ $x^2-4x+3 \geq 0$ Radici $(S=4,\ P=3)$ $x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

≥ 0 $\rightsquigarrow$ "VALORI ESTERNI" $x \leq 1$ oppure $x \geq 3$



Questo disegno rappresenta il segno di x^2-4x+3

$\boxed{2}$ $x^2-4x+3 \leq 0$ $1 \leq x \leq 3$ $[1,3]$

$\boxed{3}$ $x^2-4x+3 > 0$ $x<1$ oppure $x>3$, che si scrive anche

$(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$\boxed{4}$ $x^2 \leq 4$ $\rightsquigarrow$ $x \leq \pm 2$ ASSURDITÀ PURA !!!!

$x^2-4 \leq 0$ Radici : $x = \pm 2$

VALORI INTERNI $-2 \leq x \leq 2$ $[-2,2]$

$\boxed{5}$ $x^2 \geq 3x$ $\cancel{x^2} \geq 3\cancel{x}$ $x \geq 3$ NO!!!!!

$x^2-3x \geq 0$ Diseq. 2° grado : radici

VALORI ESTERNI

$x^2-3x=0$ $x(x-3)=0$

2 radici : $x=0$ e $x=3$

$(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

$\boxed{6}$ $x^2+4 \geq 0$ $x^2+4 \leq 0$

Disequazioni di 2° grado. Radici $x^2+4=0$ NESSUNA

Siamo nel caso $\Delta < 0$

$x^2+4 \geq 0$ sempre $\mathbb{R}$

$x^2+4 \leq 0$ MAI $\emptyset$