DIVISIONE TRA POLINOMI
EQUAZIONI POLINOMIALI

Titolo nota 16/09/2008

Dati 2 polinomi $A(x)$ e $B(x)$ la divisione tra $A(x)$ e $B(x)$ consiste nel trovare 2 polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ tali che

$$A(x) = B(x) \cdot \underbrace{Q(x)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{resto}}$$

dove il grado di $R(x)$ è <u>MINORE</u> (stretto) del grado di $B(x)$.

Come si trovano $Q(x)$ ed $R(x)$? Facendo la "divisione per colonne"

$$\begin{array}{rrrr|l}
\multicolumn{4}{l|}{A(x)} & \\
\boxed{x^3} & \boxed{+2x^2} & \boxed{-3x} & \boxed{+1} & \boxed{x^2+2} \quad B(x) \\
\cline{5-5}
-x^3 & & -2x & & \boxed{x+2} \quad Q(x) \\
\cline{1-4}
// & 2x^2 & -5x & +1 & \\
 & -2x^2 & & -4 & \\
\cline{2-4}
 & // & \boxed{-5x} & \boxed{-3} & \\
 & & \multicolumn{2}{c}{R(x)} &
\end{array}$$

Verifica:

$$\begin{array}{ccccc}
x^3+2x^2-3x+1 & = & (x^2+2)(x+2) & + & (-5x-3) \\
A(x) & = & B(x)\ Q(x) & + & R(x)
\end{array}$$

<u>Esempio 2</u> Voglio dividere x^5+2x^2-3 per x^2-x+1

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & & +2x^2 & & -3 & x^2-x+1 \\
\cline{7-7}
-x^5 & +x^4 & -x^3 & & & & \boxed{x^3+x^2+1} \quad Q(x) \\
\cline{1-6}
// & x^4 & -x^3 & +2x^2 & & -3 & \\
 & -x^4 & +x^3 & -x^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & // & // & x^2 & & -3 & \\
 & & & -x^2 & +x & -1 & \\
\cline{4-6}
 & & & // & \boxed{x} & \boxed{-4} & \\
 & & & & \multicolumn{2}{c}{R(x)} &
\end{array}$$

Verifica:

$$x^5+2x^2-3 = (x^2-x+1)(x^3+x^2+1) + (x-4)$$

(FARE PER ESERCIZIO)

Esempio 3

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +6x^3 & +4x^2 & +x & +1 & 2x^2+3x+1 \\ \hline
-4x^4 & -6x^3 & -2x^2 & & & 2x^2+1 \\ \hline
// & // & 2x^2 & +x & +1 & \\
 & & -2x^2 & -3x & -1 & \\ \hline
 & & // & \boxed{-2x} & & R(x)
\end{array}
$$

Esempio 4

Dividere x^3+1 per $x+1$. Non serve fare la divisione perché

$$\underbrace{x^3+1}_{A(x)} = \underbrace{(x+1)}_{B(x)}\underbrace{(x^2-x+1)}_{Q(x)} + \underset{R(x)}{\underset{\parallel}{0}}$$

Esempio 5

Dividere x^3+1 per $x-1$. Il resto ha per forza grado minore del grado di $B(x)$, dunque in questo caso grado di $R(x)$ è 0, dunque sarà un numero

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & +1 & x-1 \\ \hline
-x^3 & +x^2 & & & \boxed{x^2+x+1} \quad Q(x) \\ \hline
// & +x^2 & & +1 & \\
 & -x^2 & +x & & \\ \hline
 & // & x & +1 & \\
 & & -x & +1 & \\ \hline
 & & // & \boxed{2} & R(x)
\end{array}
$$

Esempio 6

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^5 & & +x^3 & & +3 & x^3-2x^2 \\ \hline
-x^5 & +2x^4 & & & & x^2+2x+5 \rightarrow Q(x) \\ \hline
// & 2x^4 & +x^3 & & & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & & & \\ \hline
 & // & 5x^3 & & +3 & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & & \\ \hline
 & & // & 10x^2 & +3 & \leftarrow R(x)
\end{array}
$$

Equazioni polinomiali

1. $2x^2 - 8x = 0 \qquad 2x(x-4) = 0 \qquad x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$

2. $2x^2 - 8 = 0, \quad x^2 = 4, \quad x = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$

3. $x^2 - 7x + 12 = 0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \dfrac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

Se un'equazione di 2° grado ha 2 radici a e b, vuol dire che il polinomio si fattorizza nella forma

$$(x-a)(x-b)$$

Nell'esempio le radici erano $x=4$ e $x=3$ e infatti

$$(x-3)(x-4) = x^2 - 4x - 3x + 12 = x^2 - 7x + 12$$

$$(x-a)(x-b) = x^2 - bx - ax + ab = x^2 - (a+b)x + ab$$

Prodotto radici = termine noto
Somma radici = coeff. di x cambiato di segno

$x^2 - 7x + 12 = 0 \qquad$ Prodotto $= 12$, Somma $= 7$ $\Rightarrow x_{1,2} \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$

— o — o —

$x^2 - x - 6 = 0 \qquad$ Prodotto $= -6 \qquad$ Somma $= 1$

Radici : 3 e -2

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

— o — o —

ACHTUNG! Quanto detto vale SOLO quando il coeff. di x^2 è uguale a 1.
Pur di dividere posso sempre portarmi in questa situazione.

— o — o —

$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad (x-2)^2 = 0 \qquad \Delta = 0 \qquad x = 2$ radice di molteplicità 2.

BIQUADRATICHE, BICUBICHE, ...

$\boxed{1}$ $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ Pongo $t = x^2$ L'equazione diventa

$t^2 - 5t + 4 = 0$ Risolvo in t $(P = 4, S = 5) \Rightarrow t = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

Torno in x risolvendo
$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$
$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

L'eq. iniziale ha 4 soluzioni

$\boxed{2}$ $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ Pongo $t = x^3$

$t^2 - 5t + 6 = 0$ $(S = 5, P = 6)$ $t = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$\rightarrow$ in totale 4 soluzioni

$\boxed{3}$ $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ Pongo $t = x^2$

$t^2 + 3t - 4 = 0$ $(S = -3, P = -4)$ $t = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$x^2 = -4 \rightarrow$ NULLA

$\rightarrow$ in totale 2 soluzioni

In termini di scomposizione $t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4)$

quindi
$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 - 1)(x^2 + 4)$$
$$= \underbrace{(x+1)(x-1)}_{\text{si vedono le radici } x = 1 \text{ e } x = -1} \underbrace{(x^2+4)}_{\text{Non produce radici (reali)}}$$

— o — o —

$\boxed{4}$ $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ $t = x^2$ $t^2 - 4t + 4 = 0$

Unica radice: $t = 2$ $x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \rightarrow$ 2 radici

$$x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2 = (x + \sqrt{2})^2 (x - \sqrt{2})^2$$

Le radici $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ hanno molteplicità 2

5 $x^3-2x^2+x=0$ $\qquad x(x^2-2x+1)=0$

$x(x-1)^2=0$

radice $x=0 \rightarrow$ MOLTEPLICITÀ 1

radice $x=1 \rightarrow$ MOLTEPLICITÀ 2

6 $x^3-2x+1=0$ Si trova una radice a occhio?

SI !! $x=1$ (se sostituisco $x=1$ viene 0)

Ma allora il polinomio è divisibile per $x-1$. Divido:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -2x & +1 & x-1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+x-1 \\
\hline
// & x^2 & -2x & +1 & \\
 & -x^2 & +x & & \\
\cline{2-4}
 & // & -x & +1 & \\
 & & +x & -1 & \\
\cline{3-4}
 & & \boxed{//} & \boxed{//} &
\end{array}
$$

DOVEVA VENIRE 0

Fattorizzazione:

$$x^3-2x+1=\underbrace{(x-1)}_{\text{produce radice } x=1}(x^2+x-1)$$

$x^2+x-1=0$ produce altre 2 radici (forse)

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Quindi in tutto ci sono 3 soluzioni

—o—o—

Come trovare le radici a occhio?

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

sia un polinomio a coeff. INTERI. Se questo polinomio ha una radice razionale (cioè una frazione $\frac{m}{n}$, con m,n interi) allora $\boxed{m \text{ divide } a_0}$ ed $\boxed{n \text{ divide } a_n}$

Quindi i tentativi da fare sono un numero finito

Esempio 1 $\quad x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Se c'è una radice del tipo $\frac{m}{n}$, allora
↗ m divide 6
↘ n divide 1

Quindi i tentativi da fare sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Esempio 2 $\quad 3x^3 - 5x^2 + 7x + 3 = 0$

↗ m divide 3
↘ n divide 3

Tentativi: ± 3, $\pm \frac{1}{3}$, ± 1

Esempio 3 $\quad 18x^4 - 45x^3 + 16x^2 + 5x - 2 = 0$

↗ m divide -2
↘ n divide 18

Tentativi: $\pm 1, \pm 2$

$\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{2}$

$\pm \frac{1}{6}$

$\pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}$

$\pm \frac{1}{18}$

— o —

E se a occhio non si trova nulla? Allora non ci sono frazioni tra le radici, e non è + precorso !!!