POTENZE E RADICI

A^{x} ← ESPONENTE

↑ BASE

Titolo nota 15/09/2008

$\boxed{1^{\circ}\ \text{CASO}}$ BASE QUALUNQUE

ESPONENTE INTERO POSITIVO (>0) A^{n}

$$\boxed{A^{n} = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\ \text{volte}}}$$

Esempi

$5^{2} = 5 \cdot 5 = 25$

$2^{5} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$3^{3} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$1^{6} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$0^{7} = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$(-3)^{3} = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$; $(-1)^{5} = -1$

$(-3)^{2} = (-3) \cdot (-3) = 9$

$(-1)^{2008} = 1$

Proprietà

① $\boxed{A^m \cdot A^n = A^{m+n}}$

$$A^m \cdot A^n = \underbrace{\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ volte}} \cdot \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ volte}}}_{m+n} = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m+n \text{ volte}} = A^{m+n}$$

② $\boxed{(A^m)^n = A^{m \cdot n}}$

$$(A^m)^n = \underbrace{A^m \cdot A^m \cdot \ldots \cdot A^m}_{n \text{ volte}}$$

$$= \overbrace{\underbrace{(A \cdot \ldots \cdot A)}_{m} \cdot \underbrace{(A \cdot \ldots \cdot A)}_{m} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(A \cdot \ldots \cdot A)}_{m}}^{n \text{ blocchi di } m \text{ } A} = A^{m \cdot n}$$

(3) $\boxed{\dfrac{A^m}{A^n} = A^{m-n}}$

Richiede (per ora) $m > n$

e per sempre $A \neq 0$

$$\frac{A^m}{A^n} = \frac{\overbrace{A \cdot \ldots \cdot A}^{m}}{\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n}}$$

semplifico quello che si può

e avanzano sopra $m-n$ A

$$= A^{m-n}$$

Esempio: $\dfrac{A^8}{A^5} = \dfrac{A \cdot A \cdot A \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A}}{\cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{A}} = A^3$

(4) $\boxed{A^n \cdot B^n = (AB)^n}$

Serve che l'esponente sia sempre lo stesso

$$A^n \cdot B^n = \overbrace{A \cdot \ldots \cdot A}^{n} \cdot \overbrace{B \cdot \ldots \cdot B}^{n} = \overbrace{(A \cdot B)(A \cdot B) \cdot \ldots \cdot (A \cdot B)}^{n}$$

$$= (A \cdot B)^n$$

5 $\left.\begin{array}{l} A^n \pm B^n \\ A^n \pm A^m \end{array}\right]$ NULLA DI FURBO

Esempi $\boxed{1}$ $\dfrac{10^7}{10^3} = 10^4$; $\boxed{2}$ $\dfrac{1000 \cdot 10^3}{100^2}$

$$\frac{1000 \cdot 10^3}{100^2} = \frac{10^3 \cdot 10^3}{(10^2)^2} = \frac{10^6}{10^4} = 10^2 = 100$$

$\boxed{3}$ $1000^{1000} = (10^3)^{1000} = 10^{3000}$

$\boxed{4}$ $\dfrac{100^{100}}{200} = \dfrac{100^{100}}{2 \cdot 100} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{100^{100}}{100} = \dfrac{1}{2}\,100^{99}$

Usando potenze di 2 e di 5 $\quad 100^{100} = (10^2)^{100} = 10^{200} = 2^{200} \cdot 5^{200}$

$200 = 2 \cdot 100 = 2^3 \cdot 5^2 \implies \dfrac{100^{100}}{200} = \dfrac{2^{200} \cdot 5^{200}}{2^3 \cdot 5^2} = 2^{197} \cdot 5^{198}$

$\boxed{5}$ $$\frac{1000^{100}}{100^{1000}} = \frac{(10^3)^{100}}{(10^2)^{1000}} = \frac{10^{300}}{10^{2000}} = \frac{1}{10^{1700}}$$

$\boxed{6}$ $$\frac{200^{200}}{400^{100}}$$

$$200 = 2 \cdot 100 = 2^3 \cdot 5^2$$
$$400 = 2^4 \cdot 5^2$$

$$\frac{200^{200}}{400^{100}} = \frac{(2^3 \cdot 5^2)^{200}}{(2^4 \cdot 5^2)^{100}} = \frac{(2^3)^{200} \cdot (5^2)^{200}}{(2^4)^{100} \cdot (5^2)^{100}} =$$

$$= \frac{2^{600} \cdot 5^{400}}{2^{400} \cdot 5^{200}} = 2^{600-400} \cdot 5^{400-200} = 2^{200} \cdot 5^{200}$$
$$= 10^{200}$$

<u>Altro modo</u>: $200 = 2 \cdot 100$ $\quad 400 = 2^2 \cdot 100$

$$\frac{200^{200}}{400^{100}} = \frac{(2 \cdot 100)^{200}}{(2^2 \cdot 100)^{100}} = \frac{\cancel{2^{200}} \cdot 100^{200}}{\cancel{2^{200}} \cdot 100^{100}} = 100^{100}$$

$\boxed{2^\circ \text{ CASO}}$ ESPONENTE $=0$ $A^0 = 1$

BASE $\neq 0$

Valgono le stesse proprietà di sopra; in particolare

$$\frac{A^n}{A^n} = \frac{A \cdot \ldots \cdot A}{A \cdot \ldots \cdot A} = \text{si semplifica tutto e viene } 1$$

$$= A^{n-n}$$

Se vogliamo conservare la proprietà 3, porre $A^0 = 1$ è l'unica possibilità.

$\boxed{3^\circ \text{ CASO}}$ ESPONENTE INTERO NEGATIVO

BASE $\neq 0$

$$\boxed{A^{-n} = \frac{1}{A^n}}$$

n intero >0

Tutte le proprietà restano valide

Esempi

$\boxed{1}$ $7^{-7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \frac{1}{7^7} \cdot \frac{1}{7^5} = \frac{1}{7^{12}}$

$$7^{-7} \cdot \underbrace{\left(7^{-1}\right)^5}_{} = 7^{-7} \cdot \underbrace{7^{-5}}_{} = 7^{-12} = \frac{1}{7^{12}}$$

potenza di potenza

$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$

$\boxed{2}$ $7^{-3} : 7^{-12} = 7^{-3-(-12)} = 7^{-3+12} = 7^9$

In alternativa

$$\frac{1}{7^3} : \frac{1}{7^{12}} = \frac{1}{7^3} \cdot 7^{12} = 7^{12-3} = 7^9$$

$\boxed{3}$ $\left(12^{-12} : 4^{-4}\right) \cdot 3^{-3} = \left(\frac{1}{12^{12}} : \frac{1}{4^4}\right) \cdot \frac{1}{3^3} =$

$$= \frac{1}{12^{12}} \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{(3 \cdot 4)^{12}} \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^{12}} \cdot \frac{1}{4^{12}} \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{3^3}$$

$$= \frac{1}{3^{15}} \cdot \frac{1}{4^8} = 3^{-15} \cdot 4^{-8} = 3^{-15} \cdot 2^{-16}.$$

$\boxed{\text{ACHTUNG!}}$ Torri di esponenziali vs potenza di potenza

$$2^{3^2} = 2^9 = 2^{(3^2)} \qquad \underbrace{\left(2^3\right)^2 = 2^6}_{\text{POTENZA DI POTENZA}}$$

—o—o—

$\boxed{4^\circ \text{ CASO}}$ $A > 0$ n intero positivo (ESPONENTE = frazione con num. = 1)

$$\boxed{A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}}$$

dove $\sqrt[n]{A}$ è l'$\boxed{\text{unico numero } x > 0}$ tale che $x^n = A$

Esempi $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{8} = \boxed{2}$ è l'unico $x > 0$ t.c. $x^3 = 8$

$\sqrt{4} = \boxed{2}$ è l'unico $x > 0$ t.c. $x^2 = 4$

L'equazione $x^2 = 4$ ha 2 soluzioni $x = 2$ e $x = -2$
(per definire $\sqrt{4}$ ci interessa quella positiva)

$\sqrt[4]{16} = 2$ (l'eq. $x^4 = 16$ ha 2 soluz. $x = 2$ e $x = -2$
ma ci interessa solo $x = 2$)

<u>Proprietà</u>: le stesse del caso a esponente intero.

$\boxed{NB}$ La definizione è data in modo da estendere le proprietà

USO DEFINIZIONE

Potenza di potenza $\quad (A^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A^n} = A$

$$(A^n)^{\frac{1}{n}} = A^{n \cdot \frac{1}{n}} = A^1 = A$$

USO POTENZA DI POTENZA

$\boxed{5^\circ \text{ caso}}$ $\boxed{A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}}$

BASE $A > 0$

ESPONENTE: frazione qualunque

Volendo: $A^{\frac{m}{n}} = \left(A^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(A^m\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A^m}$$

Esercizi

$\boxed{1}$ $\sqrt[a]{16} = 2$; $16^{\frac{1}{a}} = 2$; $\left(2^4\right)^{\frac{1}{a}} = 2$

$$2^{\frac{4}{a}} = 2^1 \qquad \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow a = 4$$

$\boxed{2}$ $\sqrt[4]{a} = 3$; $a^{\frac{1}{4}} = 3$ Elevo alla 4^a a dx e sx

$$\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = (3)^4 \qquad a^1 = 3^4 \Rightarrow a = 3^4 = 81$$

3. $a^{\frac{1}{2}} = 5 \qquad \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (5)^2 \qquad \Rightarrow \quad a = 5^2 = 25$

4. $a^{3/2} = 27 \qquad \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} \qquad a = 3^{\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}} = 3^2 = 9$

5. $a^{-1/2} = \frac{1}{4} \qquad \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = \left(2^{-2}\right)^{-2}; \quad a = 2^4 = 16$

6. $8^a = 4 \qquad \left(2^3\right)^a = 2^2 \qquad 2^{3a} = 2^2, \quad 3a = 2, \quad a = \frac{2}{3}$

7. $\sqrt[a]{16} = 8; \quad 16^{\frac{1}{a}} = 8, \quad \left(2^4\right)^{\frac{1}{a}} = 2^3; \quad 2^{\frac{4}{a}} = 2^3$

$\frac{4}{a} = 3 \qquad a = \frac{4}{3}$

8. $2^{20} - 2^{19} \quad \boxed{= 2^{20-19} = 2^1 = 2}$

NO !!!!!

$2^a - 2^b$ NON È 2^{a-b}

$$2^{20} = 2^{1+19} = 2^1 \cdot 2^{19} = 2 \cdot 2^{19}$$

$$2^{20} - 2^{19} = 2 \cdot 2^{19} - 2^{19} = 2^{19}$$

$$2B - B = B$$

$\boxed{9}$ $$3^8 + 3^8 + 3^8 = 3 \cdot 3^8 = 3^1 \cdot 3^8 = 3^{1+8} = 3^9$$

$$3^8 + 3^8 = 2 \cdot 3^8$$