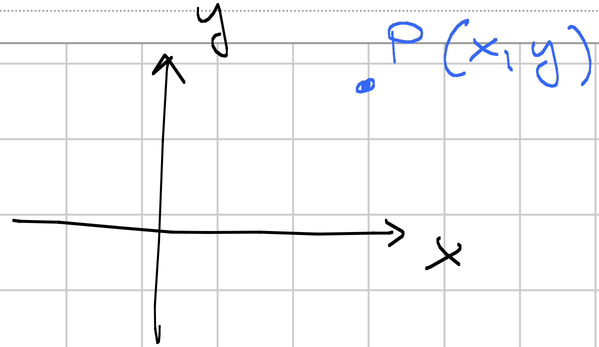
GEOMETRIA ANALITICA

Titolo nota 27/09/2007

Piano cartesiano



ORDINATA

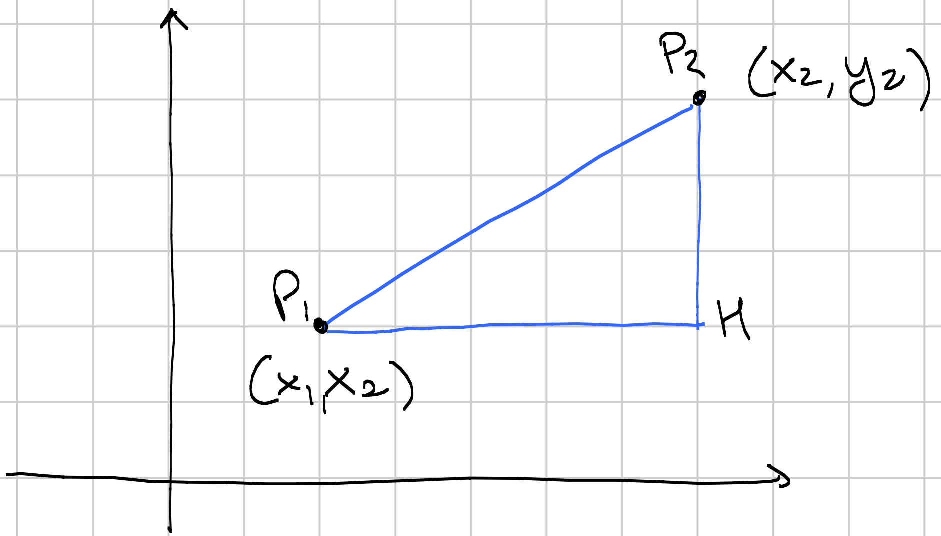
Ogni coppia di numeri reali

individua UNIVOCAMENTE un punto del piano

Coppia ordinata vuol dire che $(3,2) \neq (2,3)$

$\boxed{\text{DISTANZA TRA 2 PUNTI}}$ $P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$



$$(P_1P_2)^2 = P_1H^2 + P_2H^2$$

Pitagora

$$P_1H = |x_2 - x_1|$$

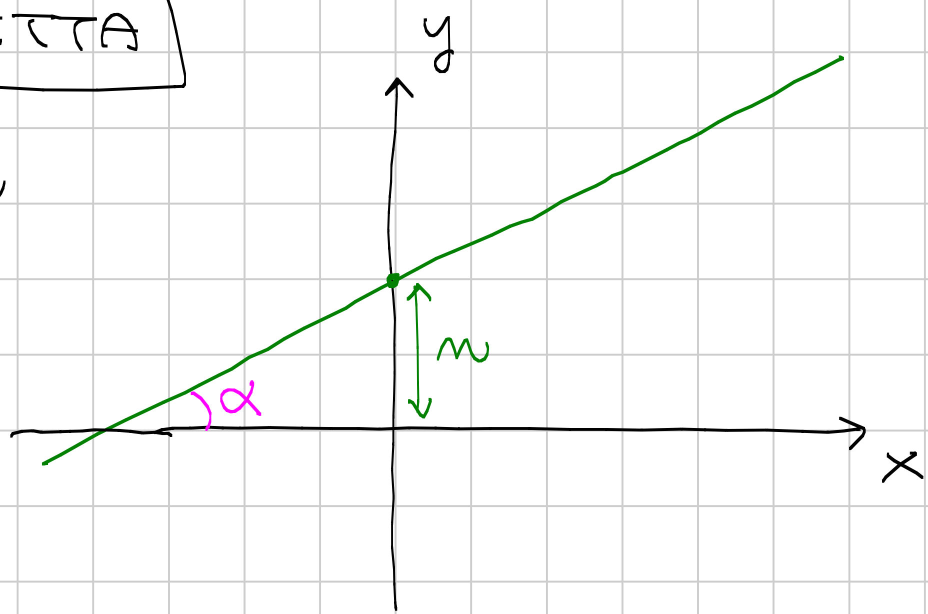
$$P_2H = |y_2 - y_1|$$

— o — o —

EQUAZIONE DELLA RETTA

1° modo: $y = mx + n$

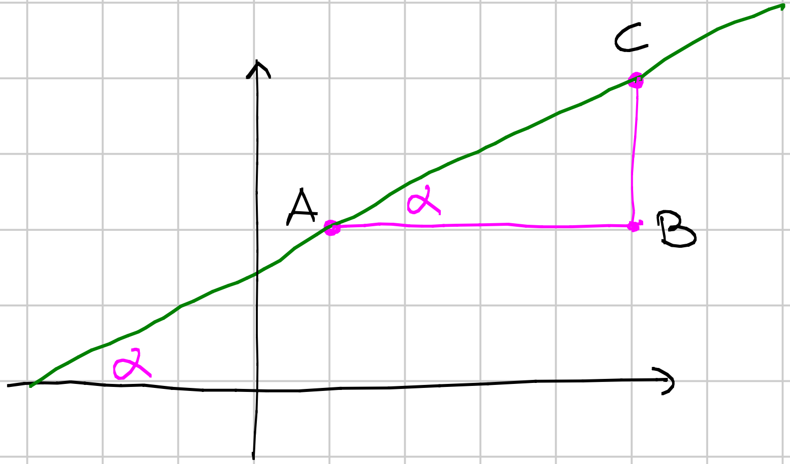
COEFF. ANGOLARE



$$\boxed{m = \tan\alpha}$$

$m \begin{cases} m>0 \\ m=0 \\ m<0 \end{cases}$

+ m cresce, più la retta è pendente



$$\tan\alpha = \frac{CB}{AB}$$

Per i teo. su Δ rett.

$CB = AC \cdot \sin\alpha$

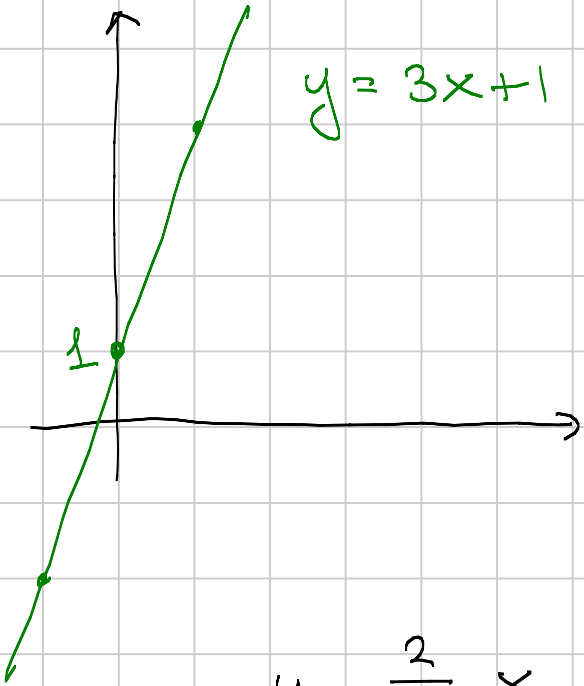
$AB = AC \cdot \cos\alpha$

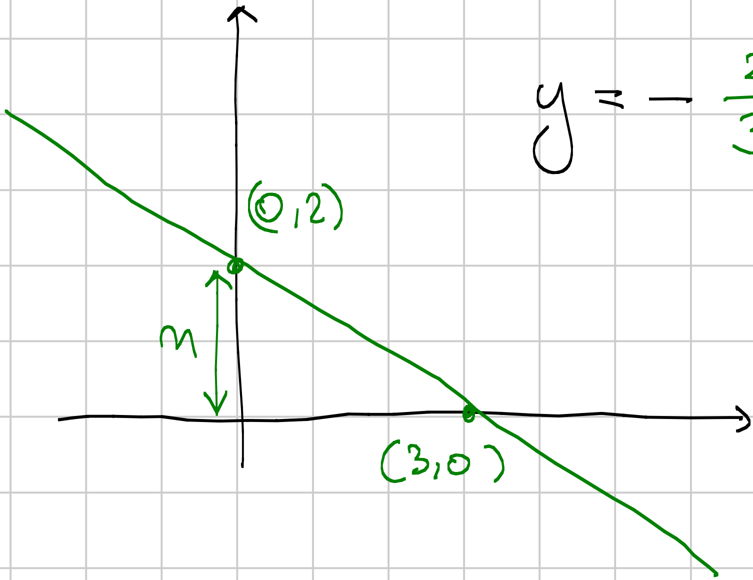
dividendo si trova $\tan\alpha$

nella figura

$$m = \tan\alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

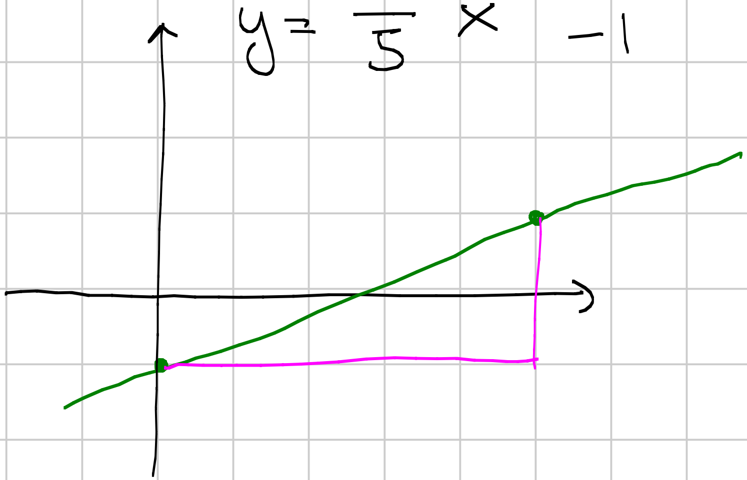
$y = 3x + 1$





$y = -\frac{2}{3}x + 2$

$y = \frac{2}{5}x - 1$



Cerco la retta che passa per $(0,-1)$ e per $(5,1)$.
La retta avrà eq. $y = mx + n$

$$\begin{cases} -1 = m \cdot 0 + n \rightarrow \text{passare per } (0,-1) \\ 1 = m \cdot 5 + n \rightarrow \text{passare per } (5,1) \end{cases}$$

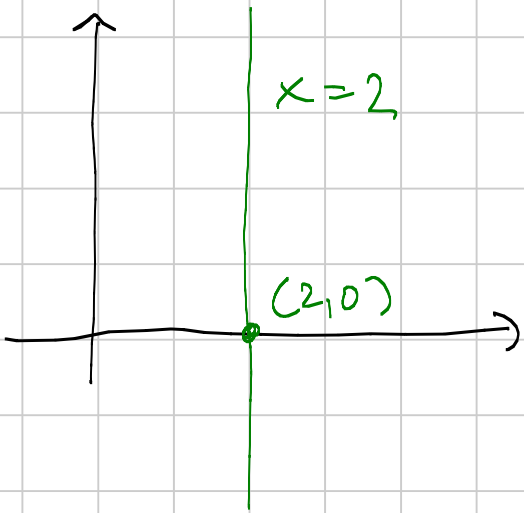
$$\begin{cases} \boxed{n = -1} \\ 5m + n = 1 \end{cases} \rightarrow 5m - 1 = 1 \rightarrow 5m = 2 \rightarrow \boxed{m = \frac{2}{5}}$$

Commenti sul primo modo:

2 rette diverse hanno m ed n diversi?

Detto altrimenti: m ed n determinano univocamente la retta? SI

Tutte le rette si scrivono nella forma $y = mx + n$? NO!
Mancano le rette parallele all'asse y.



$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ $ax + by + c = 0$

Vantaggio: così si scrivono tutte le rette, comprese quelle // asse y.

Svantaggio: ci sono infinite equazioni che descrivono la stessa retta
($2x+3y-5=0$, $4x+6y-10=0$, $-2x-3y+5=0$)

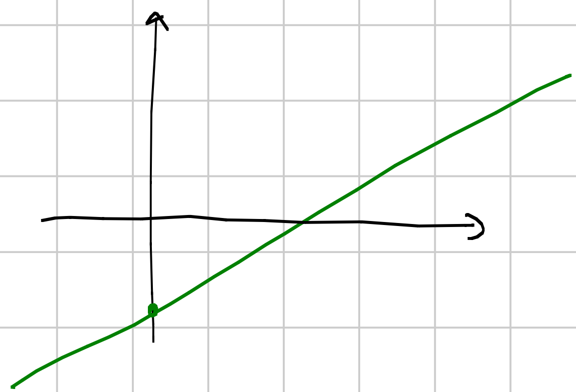
Come si passa da un modo all'altro

$y = 2x+5 \rightsquigarrow y-2x-5=0$

1° modo — 2° modo

$3y-2x+7=0 \rightsquigarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

2° modo — RICAVO y — 1° modo



Si può ricavare $y \iff b \neq 0$

Se $b=0$, la retta è // asse y
Se $a=0$, la retta è // asse x
Se a e $b=0$, allora NON è l'eq. di una retta

— o — o —

RETTE PARALLELE E PERPENDICOLARI

Nel 1° modo 2 rette sono parallele $\Leftrightarrow$ hanno lo stesso coeff. angolare

Esempio

$$y = 2x - 5 \qquad ax + 7y + 3 = 0$$

Per quale valore di a sono parallele?

Riscrivo la 2ª retta nel 1° modo: $y = -\frac{a}{7}x - \frac{3}{7}$

Impongo che il coeff. ang. sia lo stesso $2 = -\frac{a}{7}$

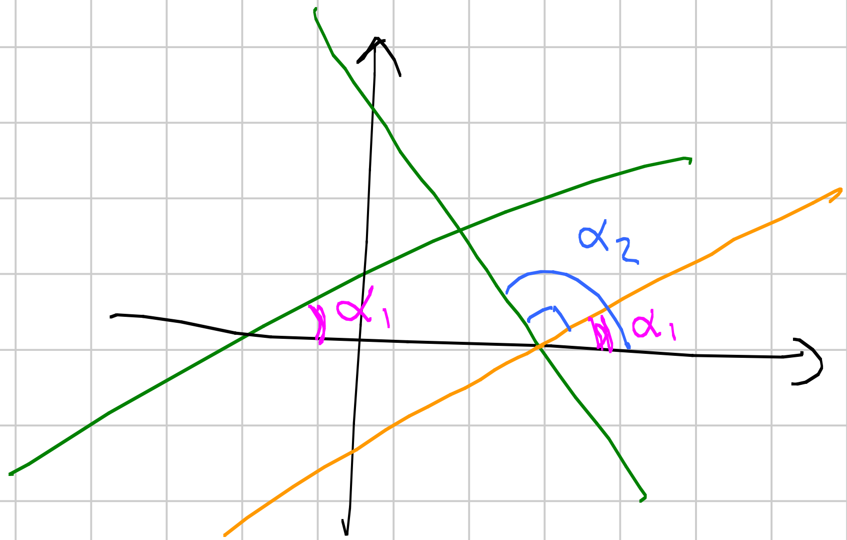
$$\boxed{a = -14}$$

Nel primo modo 2 rette $y = m_1 x + n_1$, $y = m_2 x + n_2$
sono perpendicolari
se e solo se $\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$

Nell'esempio di prima sono perpendicolari $(\perp) \Leftrightarrow$

$$-\frac{a}{7} = -\frac{1}{2} \qquad a = \frac{7}{2}$$

Se la prima retta forma un angolo α_1 e la seconda un angolo α_2 con l'asse x



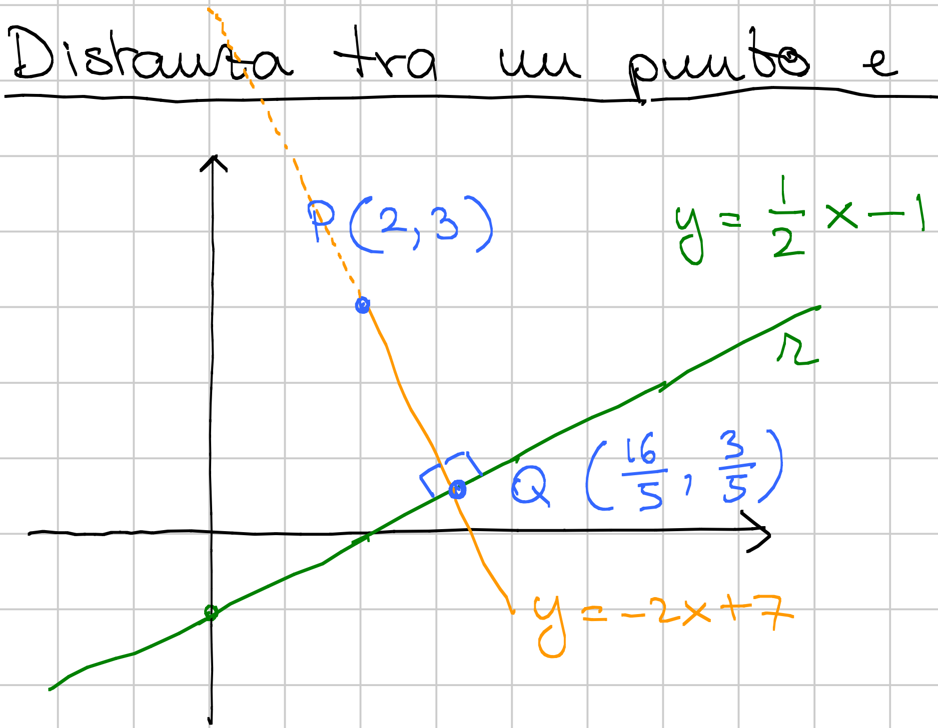
$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$$

$$m_2 = \tan\alpha_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1\right) \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{\tan\alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$$

Archi associati

Intersezione fra 2 rette ⇝ sistema

Distanza tra un punto e 1 retta



Piano!

1. * scrivere l'eq. della retta ⊥ ad r passante per P
2. * trovare Q intersecando le 2 rette
3. * fare la distanza tra P e Q

① La retta per P $\perp$ ad r avrà equazione $y = mx + n$

dove $m = -2$ (cioè $-\frac{1}{\text{coeff. ang. retta } r}$)

$y = -2x + n$

Per trovare n sostituisco P $\quad 3 = -2 \cdot 2 + n$

$n = 7$

$y = -2x + 7$

② $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$ $\quad \frac{1}{2}x - 1 = -2x + 7 \; ; \quad x - 2 = -4x + 14$

$5x = 16 \qquad \boxed{x = \frac{16}{5}}$

$y = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} \qquad Q\left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$

③ $\text{dist}(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{16}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - 3\right)^2} =$ conto ....

Formula finale: dato un punto $P(x_0, y_0)$ ed una retta r di eq. $ax+by+c=0$ (2° modo)

$$\boxed{\text{dist}(P,r) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Nell'esempio $P=(2,3)$ r $y=\frac{1}{2}x-1$

2° modo

$2y = x-2$

$x-2y-2=0$

$$\text{dist}(P,r) = \frac{|2-2\cdot 3-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

Controllare che venga lo stesso anche con il primo procedimento!!!

CIRCONFERENZA

La circonferenza con centro in (x_0, y_0) e raggio $R>0$
è l'insieme dei punti (x,y) del piano tali che
la distanza tra (x,y) e (x_0, y_0) è R

$$\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}_{\text{Distanza tra } (x,y) \text{ e } (x_0,y_0)} = R$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$$

$$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2 = R^2$$

$$\boxed{x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0}$$

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$$

Data l'eq. (nella forma con a, b, c), trovare centro e raggio.

Confrontando le espressioni abbiamo che

$$\left.\begin{aligned} a &= -2x_0 \\ b &= -2y_0 \end{aligned}\right\}$$ Noti a e b, il centro si trova subito

$$c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$$ } noto c, x_0, y_0, ho che $R^2 = x_0^2 + y_0^2 - c$

<u>Esempio 1</u> $\quad x^2 + y^2 - 3x + 2y = 0 \quad$ $a = -3$, $b = 2$, $c = 0$

$$a = -2x_0 \qquad\qquad b = -2y_0$$

$$-3 = -2x_0 \rightarrow x_0 = \frac{3}{2}; \quad 2 = -2y_0 \rightarrow y_0 = -1$$

Centro: $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 - c$$

$$= \frac{9}{4} + 1 - 0 = \frac{13}{4} \rightarrow R = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Esempio 2 $\quad 3x^2+3y^2-2x+4y-5=0$

Dividere per 3 per partire con x^2+y^2 !!!!

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{5}{3}=0 \qquad a=-\frac{2}{3}\ ;\ b=\frac{4}{3}\ ,\ c=-\frac{5}{3}$$

$a=-2x_0 \qquad\qquad b=-2y_0$

$-\frac{2}{3}=-2x_0 \to x_0=\frac{1}{3} \qquad \frac{4}{3}=-2y_0 \to y_0=-\frac{2}{3}$

Centro: $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ $\qquad R^2=x_0^2+y_0^2-c$

$$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{5}{3}=\frac{20}{9}$$

$$R=\frac{2}{3}\sqrt{5}$$

Esempio 3 $\qquad x^2+y^2+2x+7=0 \qquad a=2,\ b=0,\ c=7$

$x_0=-1,\ y_0=0 \qquad$ Centro : $(-1,0)$ CENTRO DI NULLA!!!!

$R^2=x_0^2+y_0^2-c = 1+0-7=-6 \qquad R^2=-6$

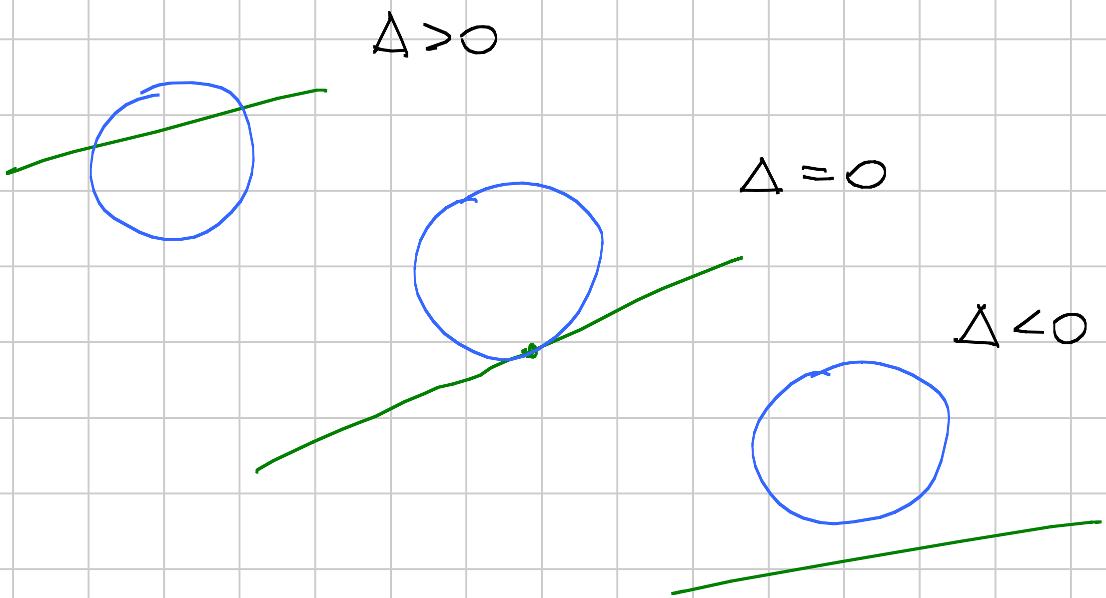
Non è l'equazione di una circonferenza

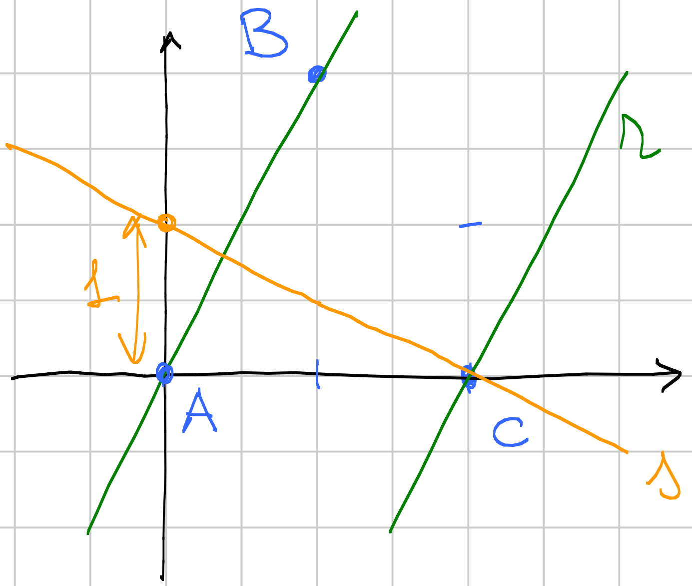
— o — o —

Se interseco una circ. con una retta faccio il sistema

il quale può avere

- 2 soluzioni
- 1 soluzione
- 0 soluzioni





$A(0,0)$ $B(1,2)$ $C(2,0)$

r = retta per C // retta AB

coeff. ang. retta AB $= 2$

retta AB: $y = 2x$

Retta r: $y = 2x + n$ Impongo di passare per C

perché // ad AB

$0 = 2 \cdot 2 + n \rightarrow n = -4$ r: $y = 2x - 4$

s = retta per C $\perp$ ad AB $y = -\frac{1}{2}x + n$.

Impongo di passare per C $0 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + n \rightarrow n = 1$

s: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

dist (C, retta AB) $\quad y = 2x \quad y - 2x = 0 \quad C(2,0)$

$$\frac{|0 - 2\cdot 2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

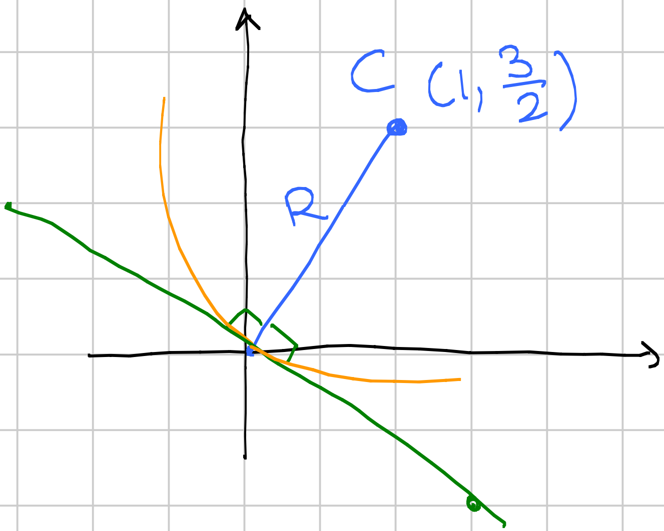
— o — o —

Circonferenza $\quad x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0 \quad a = -2 \quad b = -3 \quad c = 0$

Centro: $\quad a = -2x_0 \qquad b = -2y_0$

$-2 = -2x_0 \qquad -3 = -2y_0 \qquad$ Centro: $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

$x_0 = 1 \qquad y_0 = \frac{3}{2}$



La circ. data passa per l'origine (basta sostituire (0,0))

R = distanza di C dall'origine

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

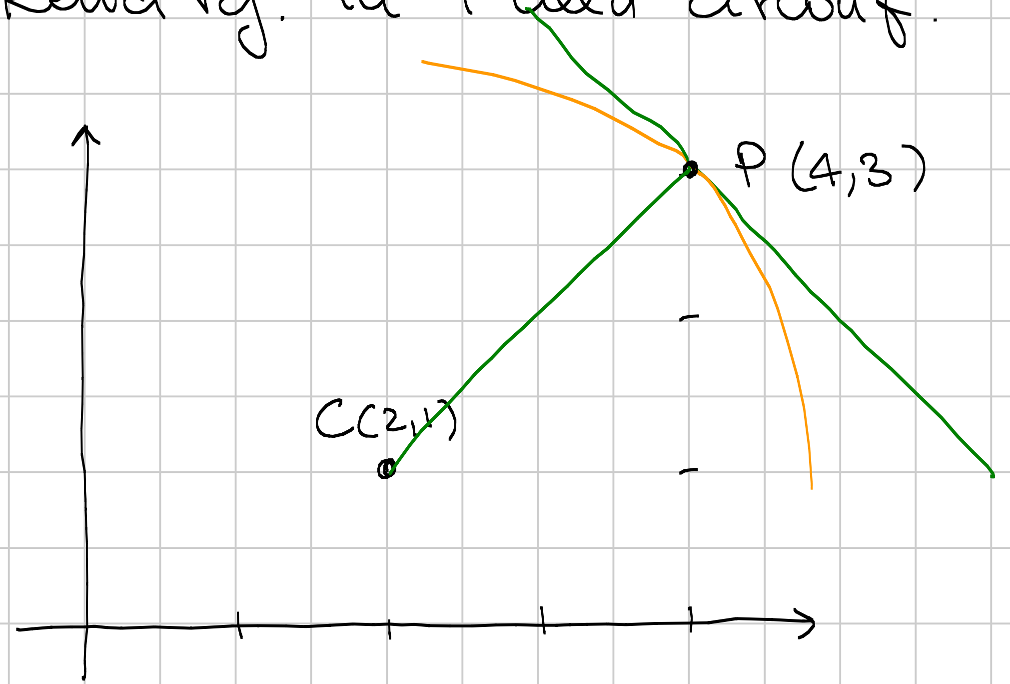
La circ. è tangente alla retta $2x+3y=0$. In quale punto?
Basta fare il sistema e si trova $P(0,0)$

$$2x+3y=0 \qquad y=-\frac{2}{3}x$$

—o—o—

Centro in $C=(2,1)$ e passa per $(4,3)=P$

Retta tg. in P alla circonf. è la retta che passa per P ed è $\perp$ alla retta CP



Coeff. angolare retta CP è 1

$\Rightarrow$ Coeff. ang. retta tg è

$$-\frac{1}{1} = -1$$

Retta tg. sarà del tipo $y = -x + n$

n si determina imponendo di passare per P.

— o — o —

$ax + 3y + 2 = 0$ passa per il punto $(1,1)$

$\Updownarrow$

$a + 3 + 2 = 0 \iff a = -5$

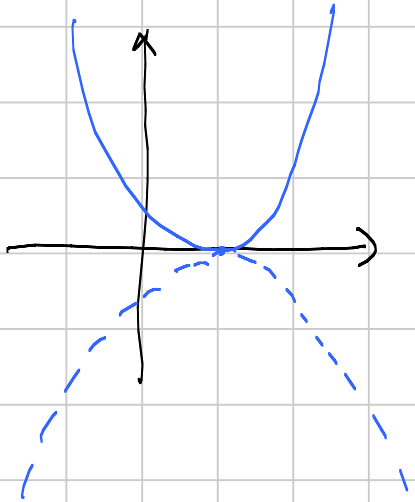
È parallela alla retta $y = 2x \iff$ coeff ang. $= 2$

$$y = -\frac{a}{3}x - \frac{2}{3} \qquad -\frac{a}{3} = 2 \rightarrow a = -6$$

È $\perp$ alla retta $y = 2x \iff$ coeff. ang. $= -\frac{1}{2}$

$$-\frac{a}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

La parabola $y = ax^2 + ax + 1$ tangente all'asse x



$\iff$ l'equazione $ax^2 + ax + 1 = 0$
ha una sola soluzione

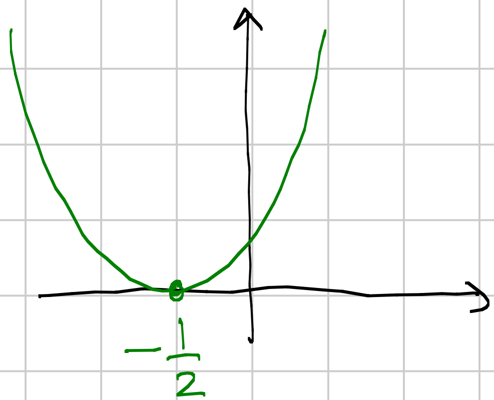
$\iff$ $\Delta = 0$

$\iff$ $a^2 - 4a = 0$ $\qquad a = \begin{cases} 0 \\ \boxed{4} \end{cases}$

No perchè per $a = 0$ NON è una parabola

Per $a = 4$ ottengo la parabola

$$y = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$$



Per quali a la retta $ax+3y+2$ è tangente alla parabola $y=x^2-10$

Metto a sistema e impongo sol. unica

$$\begin{cases} ax+3y+2=0 \\ y=x^2-10 \end{cases} \qquad ax+3x^2-30+2=0$$

$$3x^2+ax-28=0$$

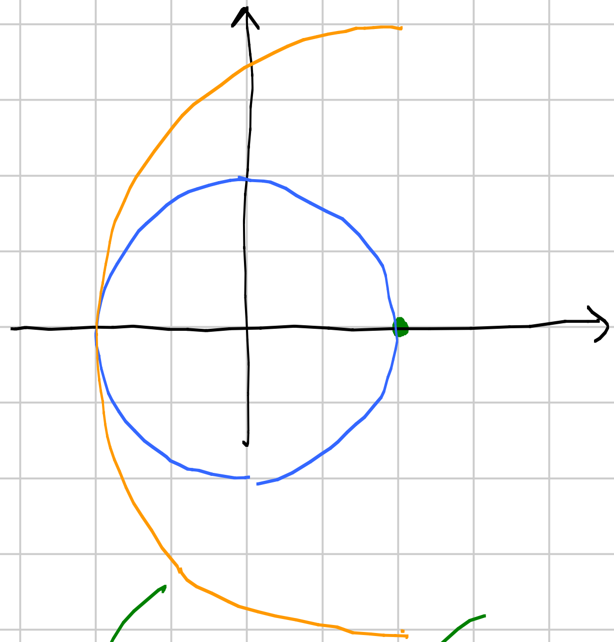
$\Delta=0$ $\qquad a^2+3\cdot 28\cdot 4=0$ $\qquad$ IMPOSSIBILE $\rightarrow$ per nessun valore di a

— o — o —

Le circonferenze $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2-2x-a=0$ sono tang.

centro $(0,0)$ e raggio 1

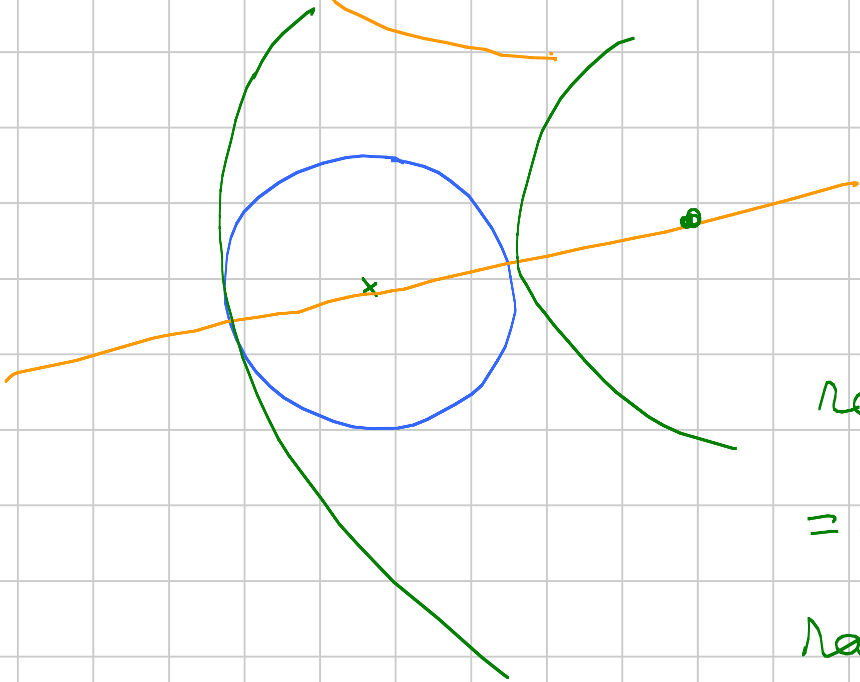
centro in $(1,0)$ e raggio dipendente da a

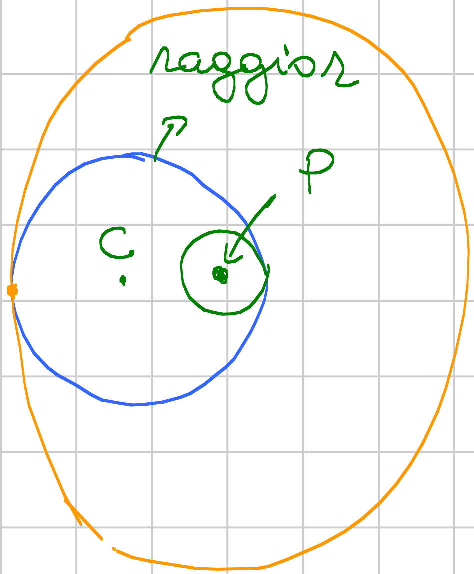


Non possono mai essere tangenti!!!!

NO!!

Possono essere tangenti se il raggio è 2



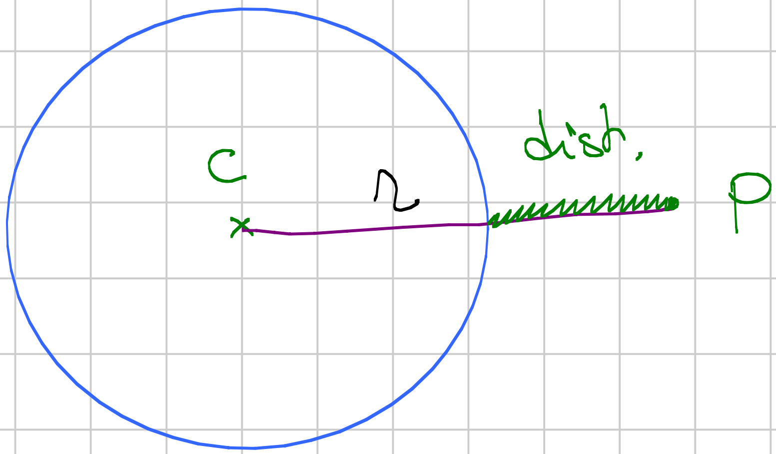


raggio piccola

$= r - CP$

raggio grande $= r + CP$

La distanza tra $(3,-1)$ e la circ. $x^2+y^2+2x-4y=a$ è 2



Distanza di P dalla circonferenza =

= CP − raggio