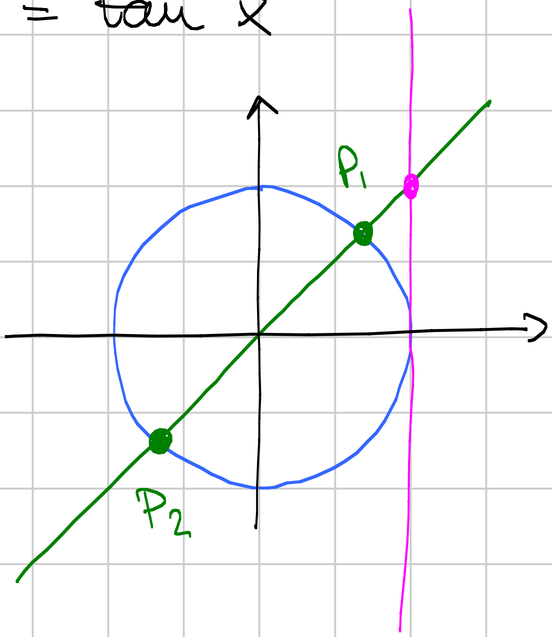
Equazioni e disequazioni trigonometriche

Titolo nota 26/09/2007

$\cos x = \sin x$

Divido per $\cos x$ (dopo aver osservato che non può essere $\cos x = \sin x = 0$)

$1 = \tan x$



In $[0, 2\pi]$ le soluzioni sono 2

$x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$

Su tutto $\mathbb{R}$ le soluzioni sarebbero

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \longrightarrow$ P_1 nei vari giri

$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \longrightarrow$ P_2 nei vari giri

Più brevemente $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $\nearrow$ P_1 per k pari, $\searrow$ P_2 per k dispari

$\sin x \cdot \cos x = 1 \qquad 2\sin x \cdot \cos x = 2$

$\sin(2x) = 2$ IMPOSSIBILE

— o — o —

$2\cos^2 x + 5\sin x = 4 \;;\; 2(1-\sin^2 x) + 5\sin x = 4$

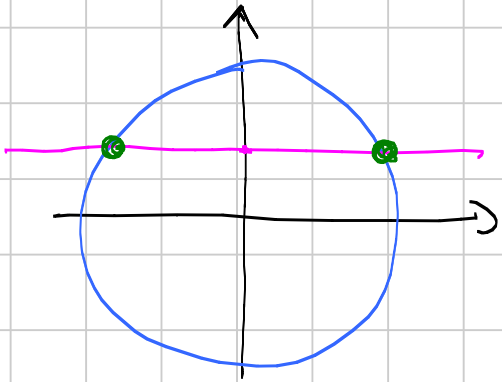
$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \;;\; 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

Eq. di II grado in $\sin x$

$$\sin x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\sin x = 2 \rightarrow$ Nulla

$\sin x = \frac{1}{2}$



In $[0, 2\pi]$ ci sono 2 soluz.

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

(se voglio soluzioni in $[-2\pi, 0]$ prendo $k = -1$)

$$3\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2(2x)$$

$$3\sin^4 x + \cos^4 x = (2\sin x\cos x)^2 = 4\sin^2 x\cos^2 x$$

Divido per $\cos^4 x$

$$3\,\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + 1 = 4\,\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \quad ; \quad 3\tan^4 x - 4\tan^2 x + 1 = 0$$

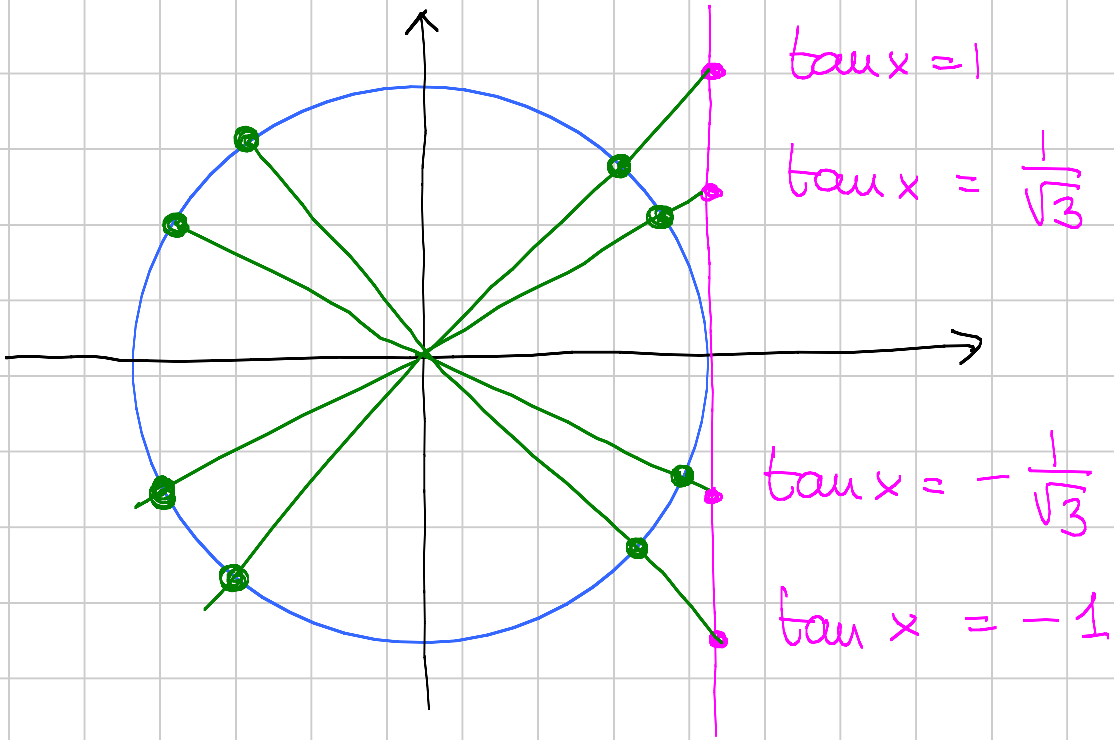
$\downarrow$

Equazione biquadratica in $\tan^2 x$

$$t = \tan^2 x \qquad 3t^2 - 4t + 1 = 0 \rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3} \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\tan^2 x = 1 \longrightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{3} \longrightarrow \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



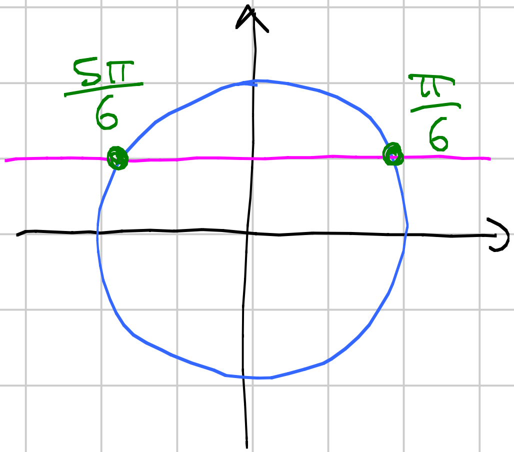
Tra 0 e 2π ci sono 8 soluzioni

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

(anche con $k=1$ stanno tra 0 e 2π)

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

Risolvere $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ in $[0, 2\pi]$



$$2x = \frac{\pi}{6} \longrightarrow x = \frac{\pi}{12}$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} \longrightarrow x = \frac{5\pi}{12}$$

ASSOLUTAMENTE NO !!!!

Cerco tutte le soluzioni (non solo quelle in $[0, 2\pi]$)

Come prima:

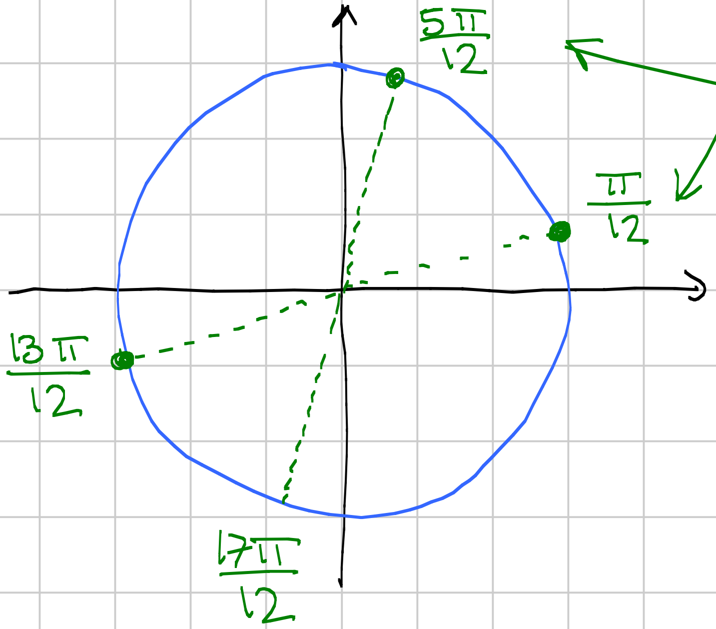
$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \longrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Per quali valori di k stanno fra 0 e 2π?

$k=0$ (ritrovo $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{5\pi}{12}$); $k=1$ (trovo $x = \frac{13\pi}{12}$, $x = \frac{17\pi}{12}$)

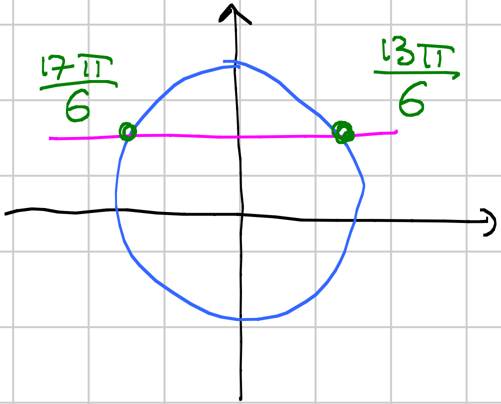
Per $k \geq 2$ diventano $> 2\pi$



sono la metà di $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$

$\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$ sono la metà di

$\frac{13\pi}{6}$ e $\frac{17\pi}{6}$



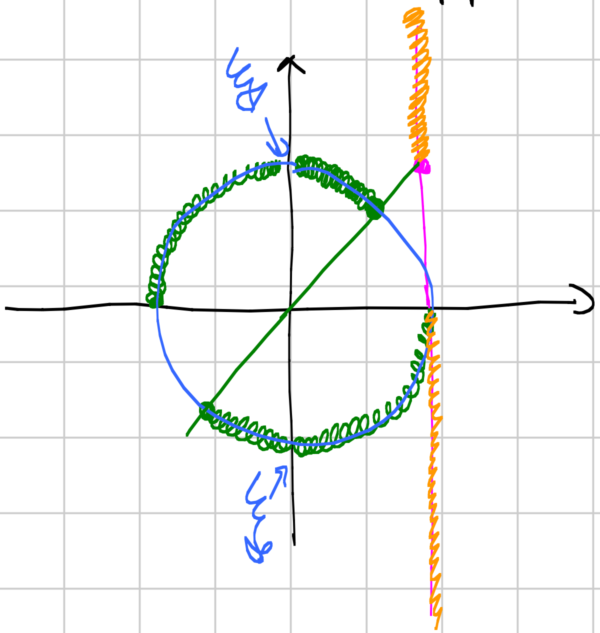
$\tan^2 x \geq \tan x$ Da NON FARE: dividere per tan x

$\tan^2 x - \tan x \geq 0$ Disequazione di II grado in tan x

→ VALORI ESTERNI

$t^2 - t \geq 0$ radici $t=0$, $t=1$

$\tan x \leq 0$ oppure $\tan x \geq 1$



Soluzione in $[0, 2\pi]$

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

$\tan x \geq \sin(2x)$; $\dfrac{\sin x}{\cos x} \geq 2\sin x \cos x$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x \cos x \geq 0$; $\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x} - 2\cos x\right) \geq 0$

$$\overset{1^\circ F}{\boxed{\sin x}} \; \frac{\overset{3^\circ F}{\boxed{1-2\cos^2 x}}}{\underset{2^\circ F}{\boxed{\cos x}}} \geq 0$$

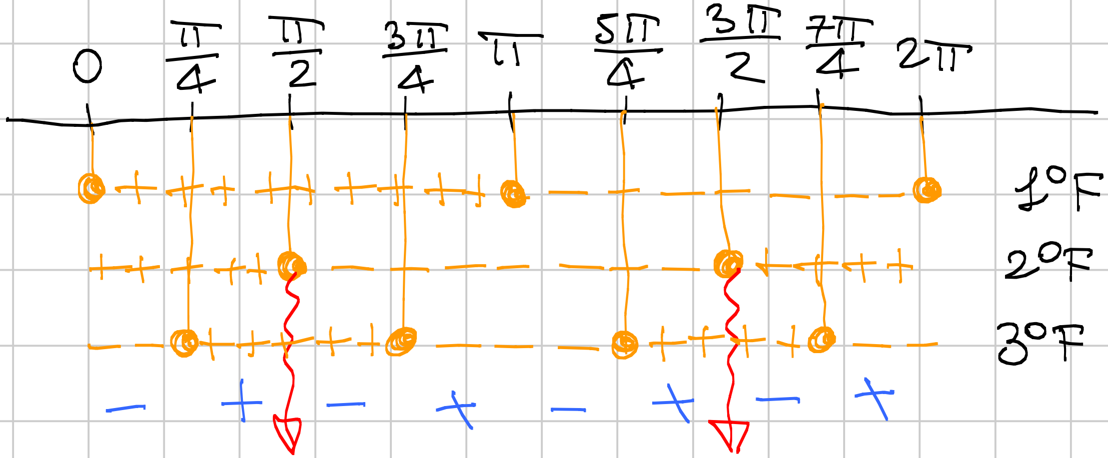
Dove è + il 3° F ?

$1-2\cos^2 x \geq 0$

$2\cos^2 x - 1 \leq 0$

Valori interni all'interv. delle radici

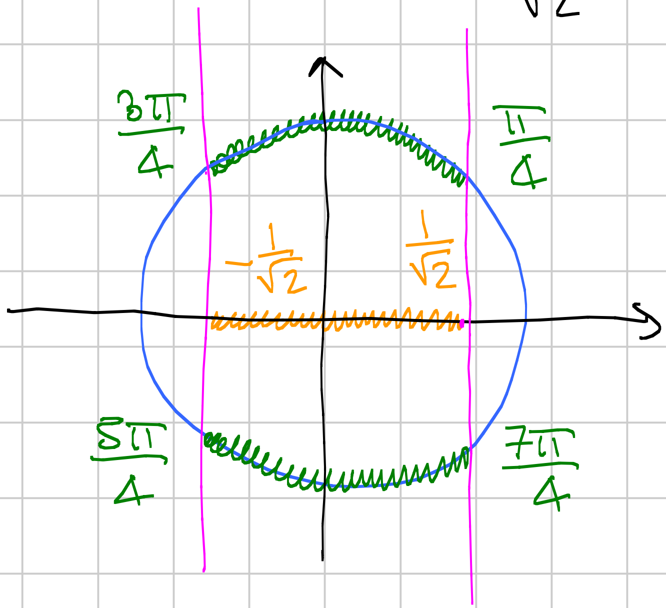
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$



SOLUZIONE FINALE:

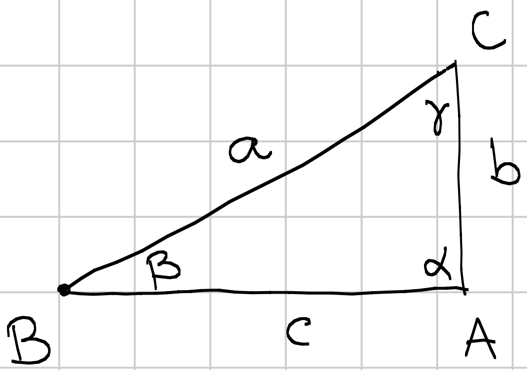
$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

Per risolvere $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \cos x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ guardo il cerchio:



RISOLUZIONE TRIANGOLI RETTANGOLI

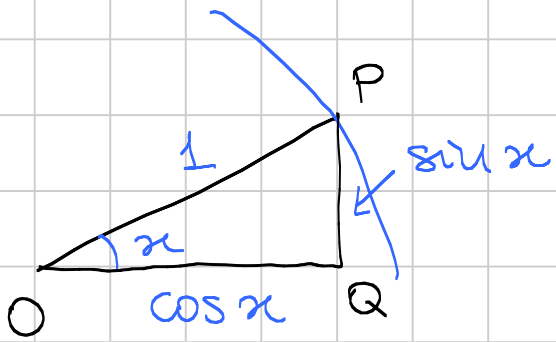
Risolvere un triangolo: noti alcuni elementi, determinare i restanti



Nel triangolo rettangolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Pitagora: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Noti 2 lati, si trova il terzo

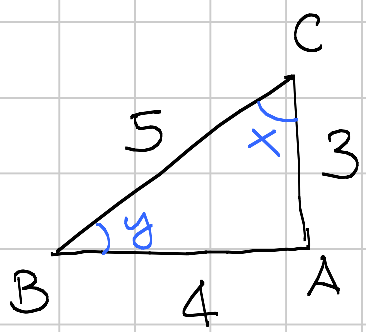


$$\boxed{\begin{aligned} AB &= BC \cdot \cos\beta \\ AC &= BC \cdot \sin\beta \end{aligned}}$$

Formalmente si dimostrano con la similitudine tra ABC e QOP

$AB = BC \cdot \sin \gamma$ $AC = BC \cdot \cos \gamma$

Esercizio



$\cos x = ?$

Con Pitagora trovo l'ipotenusa $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$AC = BC \cdot \cos x$

$3 = 5 \cdot \cos x \rightsquigarrow \cos x = \frac{3}{5}$

$AC = BC \cdot \sin y$

$3 = 5 \cdot \sin y \rightsquigarrow \sin y = \frac{3}{5}$

Non deve stupire perché $y = \frac{\pi}{2} - x$

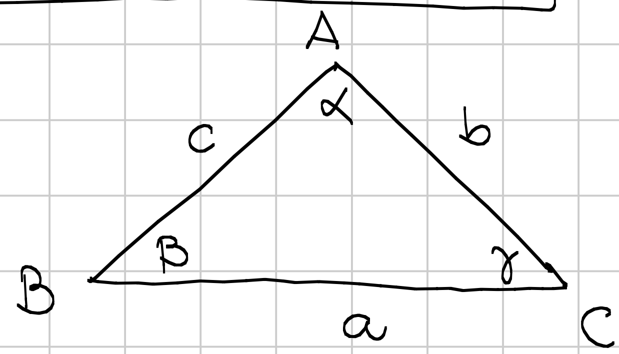
ma allora

$\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\boxed{\text{archi associati}} \longrightarrow = \cos x$

RISOLUZIONE TRIANGOLI IN GENERALE

4 Strumenti fondamentali



1°: FORMULA TRIGONOMETRICA PER L'AREA

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

Area

2°: FORMULA DI ERONE PER L'AREA

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} =$$

= semiperimetro

3°: TEOREMA DI CARNOT

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

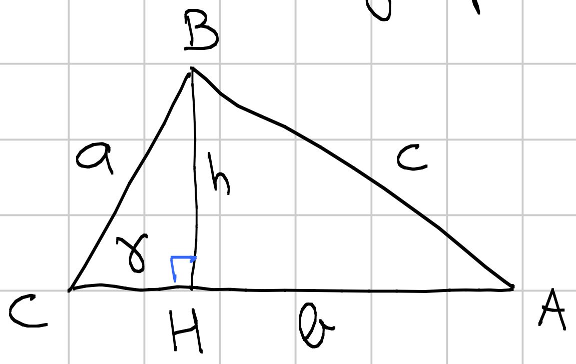
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

4°: TEOREMA DEI SENI

Raggio circonferenza circoscritta.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Formula trigo per l'area

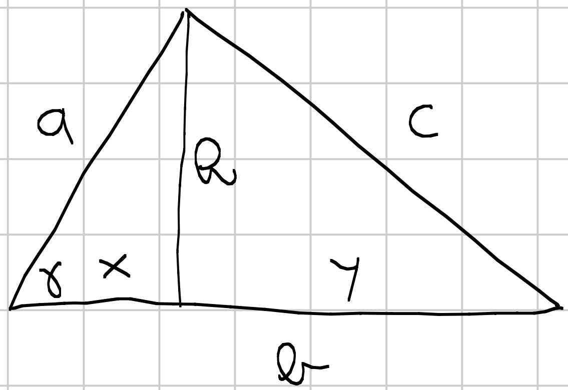


$$S = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} b a \sin\gamma$$

$$h = a \sin\gamma$$ (nel triangolo rett. CBH)

— o — o —

Carnot: conosco a, b, γ. Voglio trovare c



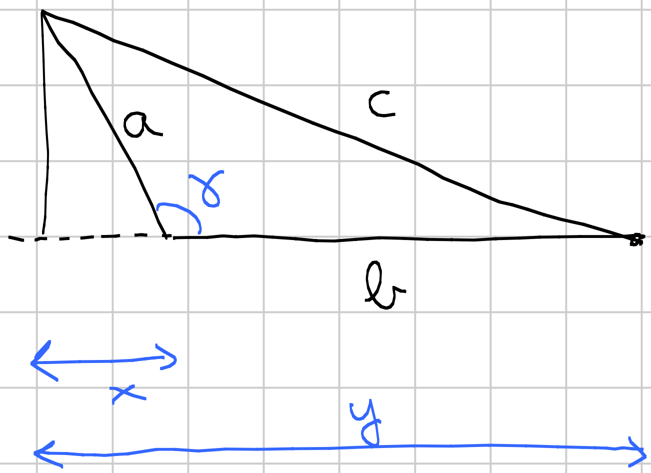
$$h = a \cdot \sin\gamma$$
$$x = a \cdot \cos\gamma$$
$$y = b - x = b - a\cos\gamma$$

$$c^2 = h^2 + y^2 = (a\sin\gamma)^2 + (b - a\cos\gamma)^2$$

Pitagora

$$= \boxed{a^2\sin^2\gamma} + b^2 + \boxed{a^2\cos^2\gamma} - 2ab\cos\gamma$$

$$= a^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



È ancora vero che $y = b - x$?

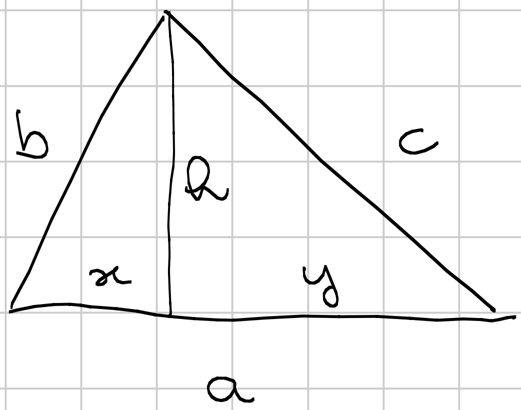
SI!! Perché in questo caso

$x = \underbrace{a\cos\gamma}_{<0 \text{ perché } \gamma > 90°}$ è NEGATIVO!!!

— o — o —

$\boxed{\text{ERONE}}$ Note le lunghezze dei lati, trovare l'area

Nota h, l'area si trova facilmente



Scrivo un sistema per calcolare h, x, y

3 incognite, quindi servono 3 equaz.

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = b^2 & \text{Pitagora in } \triangle \\ y^2 + h^2 = c^2 & \text{Pitagora in } \triangle \\ x + y = a \end{cases}$$

Non resta che risolvere il sistema per trovare h

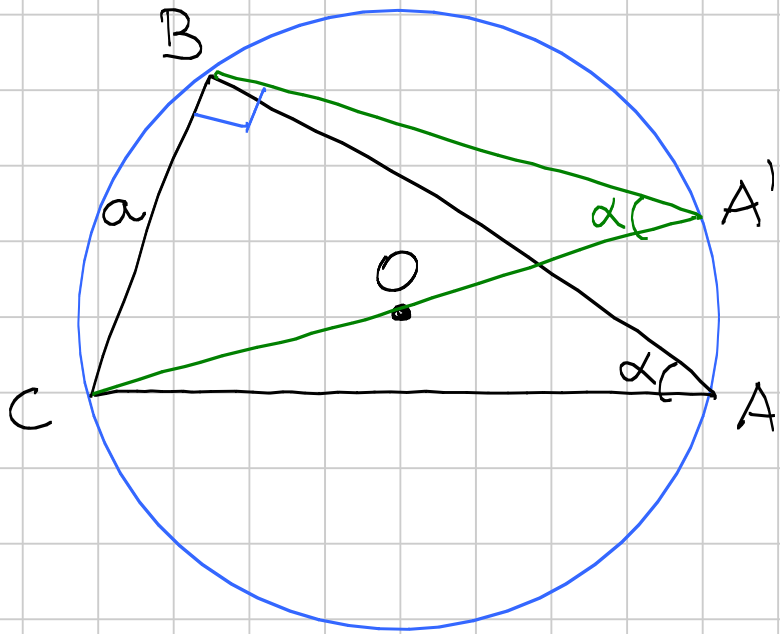
1^a eq $-$ 2^a eq. : $x^2 - y^2 = b^2 - c^2$

$$\underbrace{(x+y)}_{=a}(x-y) = b^2 - c^2$$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{b^2 - c^2}{a} \\ x + y = a \end{cases}$$

$\rightarrow$ trovo x e y $\rightarrow$ trovo h usando 1^a o 2^a equazione.

$\boxed{\text{Teo. seni}}$ Basta dimostrare che $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$



$B\hat{A}'C = \alpha$ perchè insiste sull'arco BC

CA' è un diametro della circonferenza, quindi $CA' = 2R$

L'angolo $C\hat{B}A' = 90°$ perchè insiste su un diametro

Il triangolo CBA' è un triangolo rettangolo, dunque

cateto = ipotenusa · sin (angolo opposto)

$a = 2R \cdot \sin\alpha$, cioè $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$

COME RISOLVERE UN TRIANGOLO

1° CASO Conosco 2 lati e l'angolo compreso

- trovo c usando CARNOT
- per trovare i restanti 2 angoli abbiamo 2 possibilità

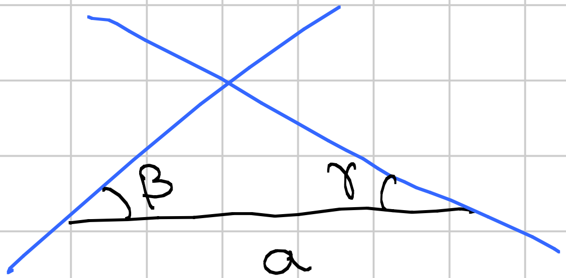
  * usare il teo dei seni

$$\frac{\boxed{c}}{\boxed{\sin\gamma}} = \frac{\boxed{a}}{\sin\alpha}$$

$\boxed{}$ Note

  * usare Carnot: noti i lati si trovano i coseni degli angoli

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$ Noti 1 lato e i 2 angoli adiacenti



* trovo l'angolo α per differenza

$$\alpha = \pi - \beta - \gamma$$

* trovo i restanti lati usando il teorema dei seni

$$\frac{b}{\boxed{\sin\beta}} = \frac{\boxed{a}}{\boxed{\sin\alpha}}$$

$\square$ Note

Nota bene: $\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma)$

$$\sin\alpha = \sin(\pi - (\beta+\gamma)) = \sin(\beta+\gamma)$$

Uso $\sin(\pi - x) = \sin x$

3° CASO Noti i 3 lati

* prima possibilità: carnot e trovo gli angoli

* seconda possibilità: Erone e trovo l'area, poi usando la formula trigo x l'area trovo i sin dei vari angoli

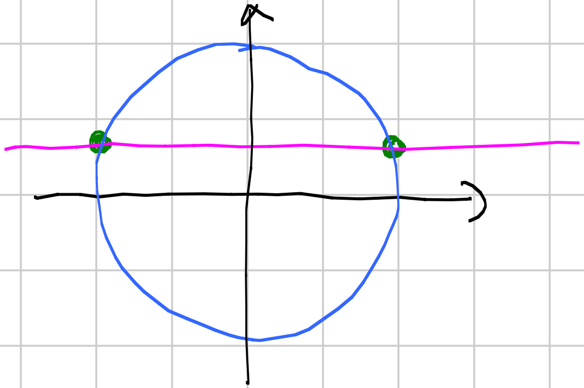
— o — o —

Volendo calcolare l'angolo α, è meglio conoscere

$\sin\alpha$ o $\boxed{\cos\alpha}$?

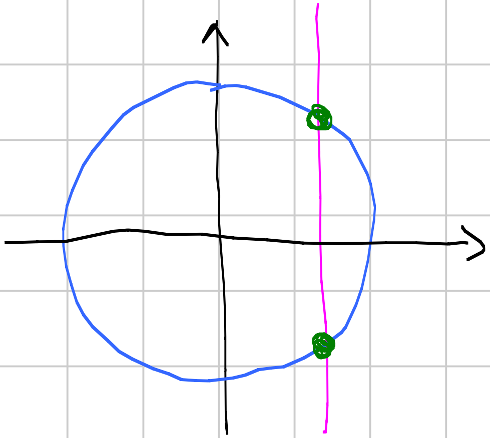
MOLTO MEGLIO !!!!

Noto $\sin\alpha$, quanti sono gli angoli corrispondenti ?



Ci sono 2 angoli che hanno lo stesso seno

ENTRAMBE SONO VALORI AMMISSIBILI (UNA è $< 90°$, l'altra $> 90°$)



Ci sono 2 angoli che hanno lo stesso cos.

SOLO UNO PERÒ È POSITIVO