Titolo nota 21/09/2007

Esempi di disequazioni

① $\dfrac{x+1}{x+2} > 3$ Non fare MAI $x+1 > 3(x+2)$

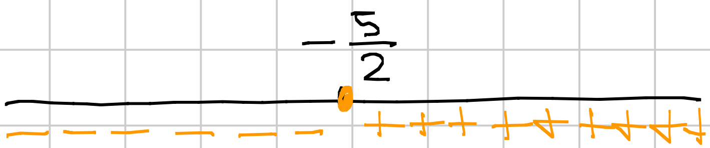
$$\frac{x+1}{x+2} - 3 > 0 \;;\; \frac{x+1-3x-6}{x+2} > 0 \;;\; \frac{-2x-5}{x+2} > 0$$

$$\frac{2x+5}{x+2} < 0$$

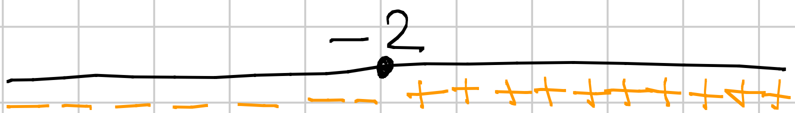
CAMBIO DI VERSO

Studio separatamente numeratore e denominatore

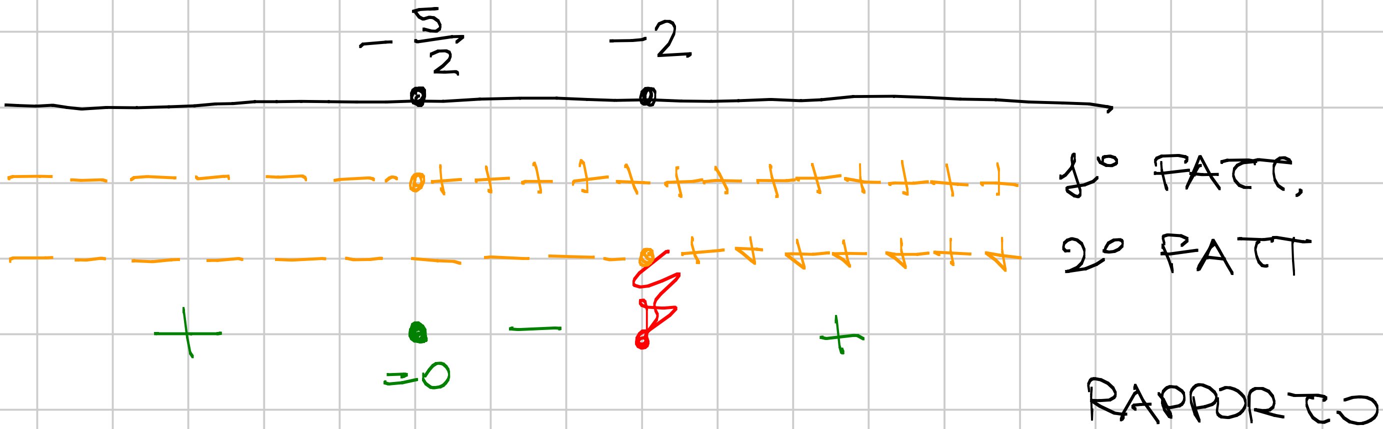
- Guardo il fattore $2x+5$, si annulla per $x = -\frac{5}{2}$



• Guardo il fattore $x+2$



Metto insieme num e denom.



CONCLUSIONE: vado a vedere il simbolo di disug. contenuto nel testo.
Esempio < la soluzione è

$-\frac{5}{2} < x < -2$ $\qquad$ $\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$ $\qquad$ $\left]-\frac{5}{2}, -2\right[$

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

$$\begin{cases} 3x+2 > 0 \\ 5x-1 < 0 \end{cases}$$

Risolvere il sistema = trovare i valori di x che soddisfano CONTEMPORANEAM. tutte le diseq. coinvolte

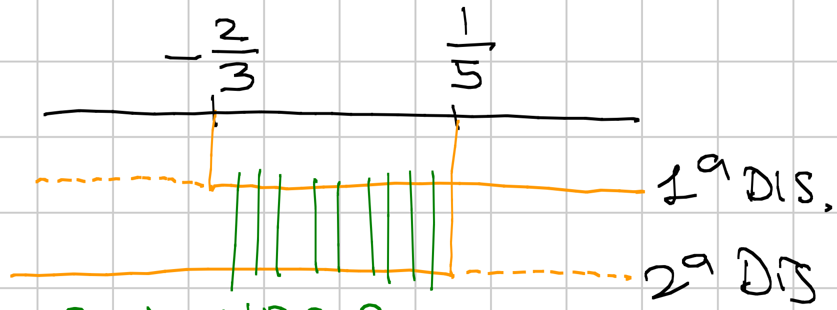
Operativamente:

① Si risolvono sep le diseq. coinvolte

$3x+2>0 \rightsquigarrow x > -\frac{2}{3}$

$5x-1<0 \rightsquigarrow x < \frac{1}{5}$

② Si traggono le conclusioni



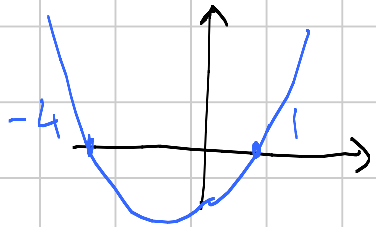
Continua = "verificato"

SONO VERIFICATE ENTRAMBE

SOL. SISTEMA $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right)$

$$\begin{cases} x^2+3x-4 \leq 0 \\ x^2+2x > 0 \end{cases}$$

1ª Diseq.: $x^2+3x-4 \leq 0$ $\quad x_{1,2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$ valori interni



Verificata per $-4 \leq x \leq 1$

2ª Diseq.: $x^2+2x > 0$ $\quad x(x+2) > 0$

$x_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$ valori esterni

Verificata per $x < -2$ e per $x > 0$

Conclusione:

Sol. sistema:

$[-4,-2) \cup (0,1]$

Equaz. e diseq. con radici

$\sqrt{x+3} = 2$ $\qquad x+3 = 4$ $\qquad x = 1$

$\sqrt{x+3} = x-3$ Faccio il quadrato:

$x+3 = x^2-6x+9$; $x^2-7x+6=0$; $x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}$

2 SOLUZIONI? Sostituisco:

$x=6$; $\sqrt{6+3} = 6-3$ $\qquad 3=3$ $\qquad$ O.K. ← UNICA SOLUZIONE

$x=1$; $\sqrt{1+3} = 1-3$ $\qquad 2=-2$ $\qquad$ NO!!!!

MORALE: OK FARE IL QUADRATO, MA POI BISOGNA CONTROLLARE CHE LE SOLUZ. OTTENUTE VERIFICHINO!!!

$\sqrt{x+3} = x-3$ La radice di sicuro è ≥ 0. Quindi il termine a dx deve essere ≥ 0. Impongo che lo sia

$\boxed{x-3 \geq 0}$ $\boxed{x \geq 3}$

Ora faccio i quadrati, risolvo e trovo

$x = $ 1 → Non verifica $x \geq 3$: NO SOLUZIONE

$x = $ 6 → verifica la condizione $x \geq 3$: Ok

— o — o — o —

$\sqrt{x+3} < 2$ $\boxed{x+3<4 \quad x<1}$ NO!!!!!!!

L'argomento della radice deve essere ≥ 0

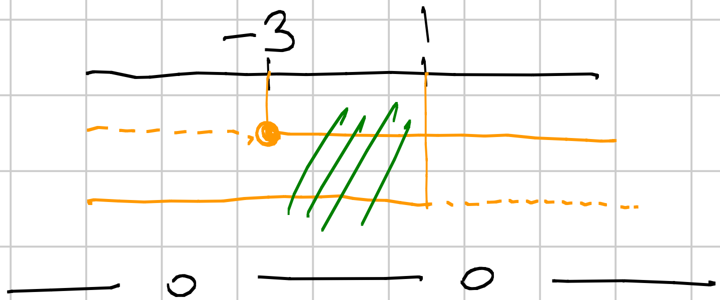
La diseq. si riduce al sistema

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+3 < 4 \end{cases}$$

← impone che l'argomento sia ≥ 0

← ciò che si ottiene facendo il quadrato

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}$$



$[-3, 1)$

$$\sqrt{x+3} < x-3$$

Se il termine a dx è ≤ 0, allora NON c'è speranza pos < neg.

Diventa un sistema a 3

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-3 > 0 \\ x+3 < (x-3)^2 \end{cases}$$

imporre argomento radice ≥ 0

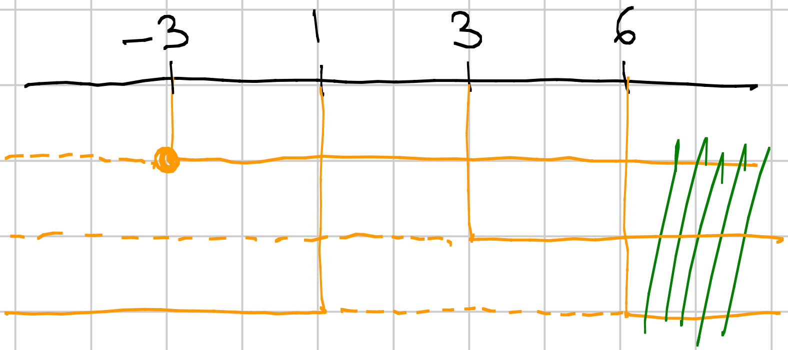
imporre termine a dx > 0

ciò che si ottiene facendo i quadrati

$x+3 \geq 0 \rightsquigarrow x \geq -3$ 1ª Diseq.

$x-3 > 0 \rightsquigarrow x > 3$ 2ª Diseq.

$x+3 < x^2-6x+9$; $x^2-7x+6 > 0$ verificata per valori esterni a 1, 6 (3ª Diseq.)



1ª Dis.
2ª Dis.
3ª Dis

SOL $x > 6$

$(6, +\infty)$

CONCLUSIONE: una diseq. del tipo

$\sqrt{f(x)} < g(x)$ si riduce al sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

arg. radice ≥ 0

termine a dx > 0

fare i quadrati

$\boxed{\text{CASO } \sqrt{\ldots} < \ldots}$

Caso $\sqrt{\ldots} > \ldots$

$\sqrt{x+3} > x-3$

Se il termine a dx è <0, allora la disequazione è AUTOMATICAMENTE soddisfatta purchè la radice abbia senso

$$\begin{cases} x-3<0 & \leftarrow \text{a dx è} <0 \\ x+3 \geq 0 & \leftarrow \text{la radice ha senso} \end{cases}$$

PRIMO INSIEME DI SOLUZIONI

C'è un secondo insieme di soluzioni dato dal sistema

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 & \leftarrow \text{a dx è} \geq 0 \\ \boxed{x+3 \geq 0} & \leftarrow \text{la radice ha senso} \\ x+3 > (x-3)^2 & \leftarrow \text{fare i quadrati} \end{cases}$$

SECONDO INSIEME DI SOLUZIONI

INUTILE PERCHÈ SEGUE DALLA TERZA

ALLA FINE SI FA L'UNIONE

$\boxed{1^\circ \text{ SISTEMA}}$

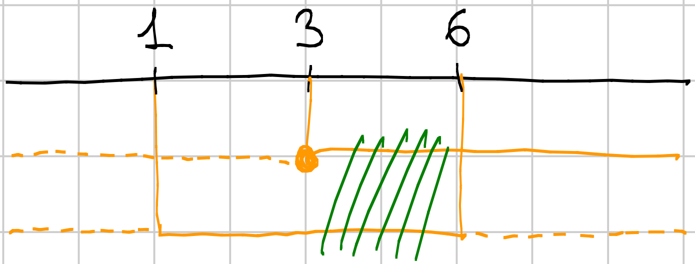
$$\begin{cases} x-3<0 \\ x+3\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<3 \\ x\geq -3 \end{cases} \quad [-3,3)$$

SOLUZ. 1° SIST.

$\boxed{2^\circ \text{ SISTEMA}}$

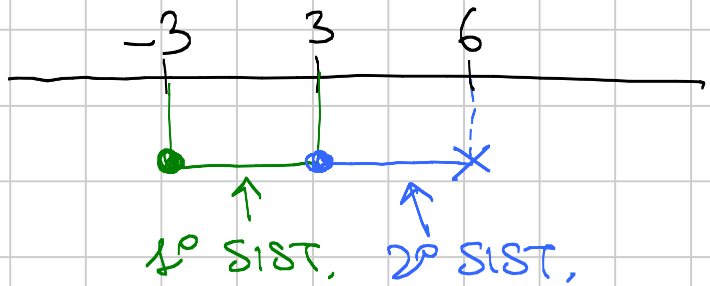
$$\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x+3>(x-3)^2 \end{cases} ; \begin{cases} x\geq 3 \\ x+3>x^2-6x+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 3 \\ x^2-7x+6<0 \end{cases} ; \begin{cases} x\geq 3 \\ 1<x<6 \end{cases}$$



$[3,6)$ ← SOLUZ. 2° SIST.

Devo UNIRE i 2 insiemi di soluzioni



UNIONE = soluz. diseq. iniz.

$= [-3,6)$

In generale la diseq.

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

ha come soluzione l'UNIONE delle soluz. dei sistemi

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

1° SISTEMA

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \underbrace{f(x) > [g(x)]^2} \end{cases}$$

↘ Assicura la positività dell'argomento della radice.

$$3^A > 3^B \rightsquigarrow A > B$$

$$3^{x^2+2} > 3^{2x+1} \rightsquigarrow x^2+2 > 2x+1$$

$$\log_2 A > \log_2 B \quad \boxed{\rightsquigarrow A > B}$$

NO!!!

o meglio NI!

L'argomento del log deve essere > 0

$\log_2 A > \log_2 B$ diventa

$$\begin{cases} \boxed{A > 0} \\ B > 0 \\ A > B \end{cases}$$

inutile perché segue dalle altre 2

$$\begin{cases} B > 0 \\ A > B \end{cases}$$

$$\log_5 (2x+1) > \log_5 (3x-2) \rightsquigarrow \begin{cases} 3x-2 > 0 & (B > 0) \\ 2x+1 > 3x-2 & (A > B) \end{cases}$$

$$\log_2(3x+1) > 4 \quad ; \quad \log_2(3x+1) > 4 \cdot \log_2 2$$

$$\log_2(3x+1) > \log_2 16$$

$$\begin{cases} 16 > 0 & (B > 0) \\ 3x+1 > 16 & (A > B) \end{cases}$$

— o — o —

$$\log_7(2x+1) \leq 1$$

$$\log_7(2x+1) \leq \log_7 7$$

$$\begin{cases} 2x+1 \leq 7 & \leftarrow \text{togliere i log} \\ 2x+1 > 0 & \leftarrow \text{imporre che il log esista} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+1 \leq 7 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x \leq 6 \\ 2x > -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, 3\right]$$

$$3^x > 2 \qquad x > \log_3 2$$

Prendo il $\log_3$ a dx e sx

$$\log_3 (3^x) > \log_3 2$$

$$x \log_3 3 > \log_3 2 \qquad x > \log_3 2$$

$$3^{x^2} < 9 \; ; \; 3^{x^2} < 3^2 \; ; \; x^2 \leq 2 \; ; \; x^2 - 2 \leq 0$$

Valori INTERNI: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$3^{x+3} > 3$; $3^{x+3} > 3^{1}$; $x+3 > 1$; $x > -2$.

$\log_3 (x+3) > 0$; $\log_3 (x+3) > \log_3 1$

$x+3 > 1$ $\longrightarrow$ $x > -2$

implica argom. di log è > 0

$\log_3 (x+3) \leq 0$; $\log_3 (x+3) \leq \log_3 1$

$\begin{cases} x+3 \leq 1 \\ x+3 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq -2 \\ x > -3 \end{cases}$ $\quad -3 < x \leq -2$

$(-3, -2]$

$\log_2 (2x-4) > 3$; $\log_2 (2x-4) > 3 \cdot \log_2 2$

$\log_2 (2x-4) > \log_2 8$; $2x-4 > 8$; $2x > 12$; $x > 6$.

$\log_2(2x-4) \leq 3$; $\log_2(2x-4) \leq \log_2 8$

$\begin{cases} 2x-4 \leq 8 \\ 2x-4 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x \leq 12 \\ 2x > 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq 6 \\ x > 2 \end{cases}$ $(2,6]$

$2\log_4 x < 1$; $2\log_4 x < \log_4 4$; $\log_4 x < \frac{1}{2}\log_4 4$

$\log_4 x < \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \log_4 2$

$\log_4 x < \log_4 2 \longrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \end{cases} \leftarrow$ condizione esistenza del log $(0,2)$

$\log_4 x^2 < 1$; $\log_4 x^2 < \log_4 4$

$\begin{cases} x^2 < 4 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-4 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$ $(-2,0) \cup (0,2)$

$\log_4 x^2$ ha senso se e solo se $x^2>0$, cioè se e solo se $x \neq 0$

$2\log_4 x$ ha senso se e solo se $x>0$

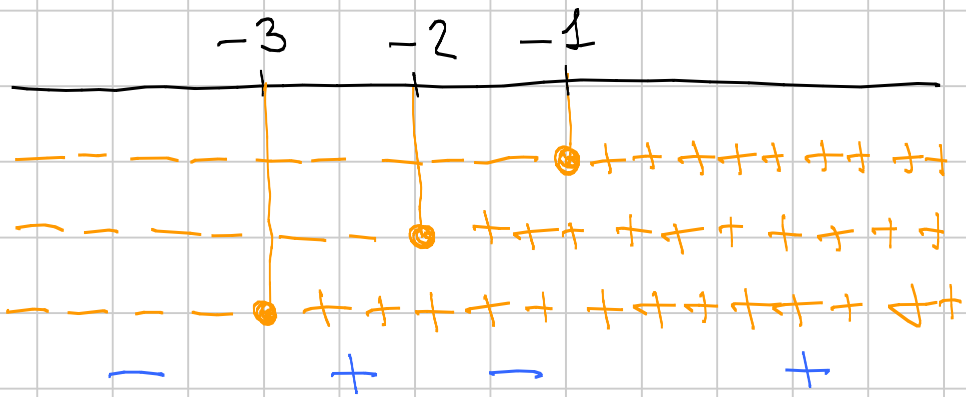
Quindi: le 2 espressioni COINCIDONO quando hanno senso entrambe

— o — o —

$(x+1)(x+2)(x+3) \leq 0$

1° F   2° F   3° F

Studio SEPARATAMENTE il segno dei 3 fattori

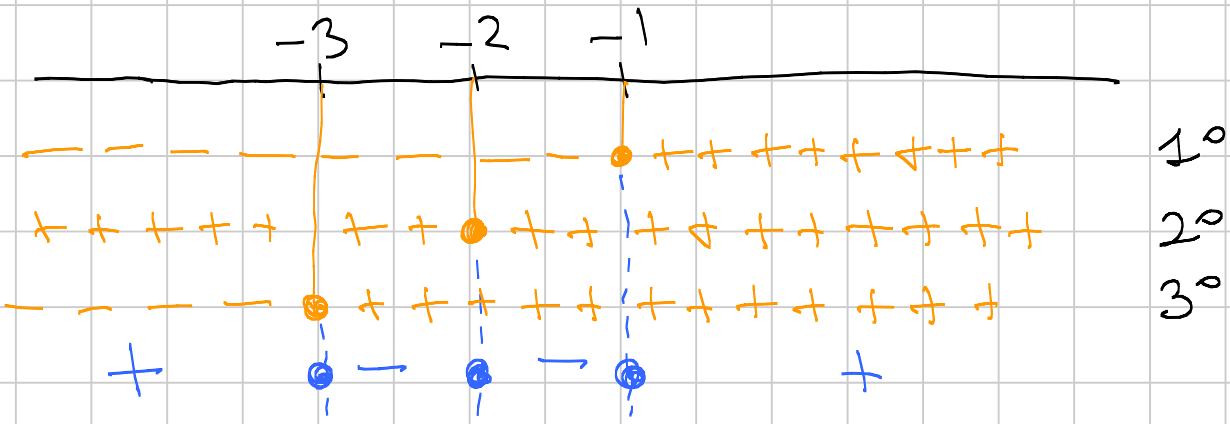


1° FATT.

$(-\infty,-3] \cup [-2,-1]$

$$(x+1)(x+2)^2(x+3) \geq 0$$

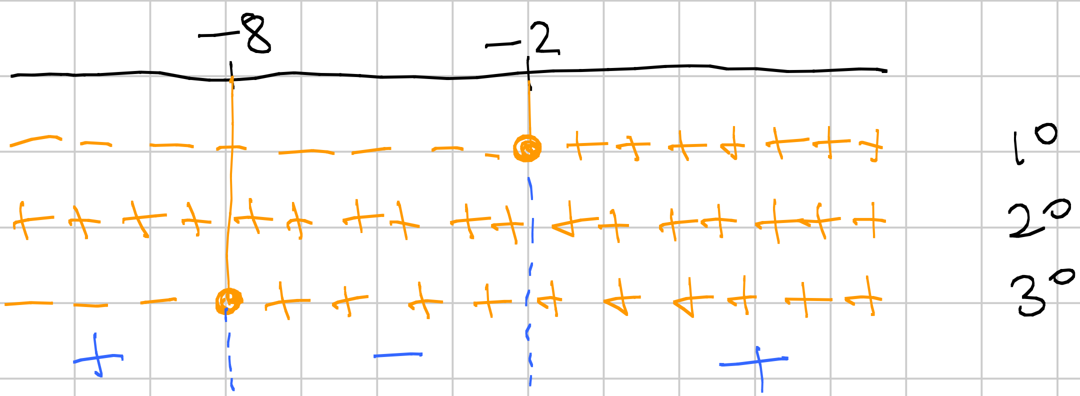
1° F 2° F 3° F



$$(-\infty, -3] \cup \{-2\} \cup [1, +\infty)$$

$$(x+2)(x^4+4)(x+8) < 0$$

1° 2° 3°



$$(-8, -2)$$

$x^4-5x^2+4>0$ Cercando le radici si trova che sono $x=\pm 1$, $x=\pm 2$

Trovate le radici abbiamo la fattorizzazione

$$x^4-5x^2+4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)>0$$

A questo punto si fa con i prodotti.

— o — o —

$x^4-3x^2-4>0$ $\quad x^2=t \quad t^2-3t-4$

$$t = \begin{cases} 4 & x^2=4 \quad x=\pm 2 \\ -1 & x^2=-1 \rightsquigarrow \text{NULLA} \end{cases}$$

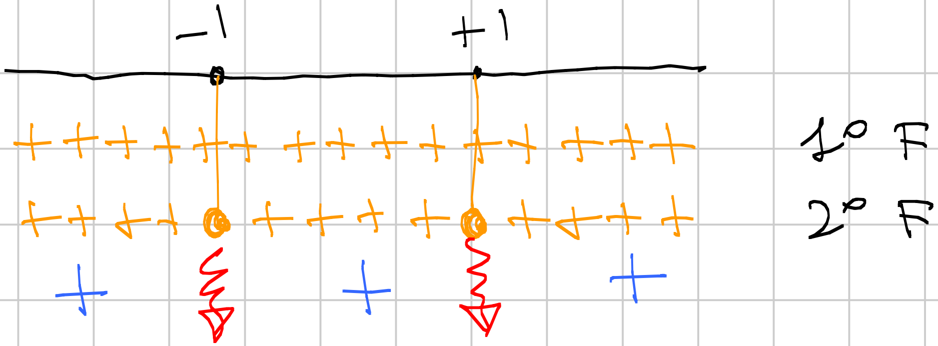
$$t^2-3t-4 = (t-4)(t+1) \quad \text{in } t$$

$$x^4-3x^2-4 = (x^2-4)(x^2+1) = \underset{1^\circ}{(x+2)}\underset{2^\circ}{(x-2)}\underset{3^\circ}{(x^2+1)}$$

$$\frac{x^4+2x^2+1}{x^4-2x^2+1} \qquad \frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}$$

← 1° fatt. sempre ≥ 0

← 2° fatt. sempre ≥ 0 e si annulla per $x = \pm 1$



Se la richiesta era ≤ 0 ⇝ soluz.: $\emptyset$

Se " " " ≥ 0 ⇝ tutto tranne $x = \pm 1$

$x \neq \pm 1$

" " " > 0 ⇝ stessa cosa