Titolo nota 20/09/2007

$x^6 + 5x^3 + 6 = 0$ $\quad t = x^3 \quad t^2 = x^6$

$t^2 + 5t + 6 = 0$ Risolvo in t $\quad$ Somma $= -5$

Prod. $= 6$

$$t_{1,2} = \begin{cases} -2 \longrightarrow x^3 = -2 \longrightarrow x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} \\ -3 \longrightarrow x^3 = -3 \longrightarrow x = -\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

— o — o —

$x^3 - 2x^2 + x = 0 \; ; \quad x(x^2 - 2x + 1) = 0 \; ; \quad x(x-1)^2 = 0$

Soluzioni $\nearrow$ $x = 0$ Molteplicità 1

$\searrow$ $x = 1$ Molteplicità 2

$x^3 - 2x + 1 = 0$

SPERARE !! CHE CI SIA UNA RADICE RAZIONALE, cioè del tipo $\frac{m}{n}$

Come trovare le radici (eventuali) che si scrivono come frazione (o numero intero)?

Bisogna provare (sostituendo) tutte le frazioni $\frac{m}{n}$ in cui

- m è un divisore del termine noto
- n è un divisore del coeff. del termine di grado max

Nell'esempio: term. noto: 1; coeff. term. grado max: 1

Nel nostro caso bisogna provare $x = 1$, $x = -1$

$\boxed{x=1}$ $\quad 1-2+1=0$ $\quad$ Ok $\quad x=1$ è UNA SOLUZIONE

dunque $x-1$ divide il pol. originario

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 & & -2x+1 & x-1 \\
\cline{4-4}
-x^3 & +x^2 & & x^2+x-1 \\
\hline
// & x^2 & -2x+1 & \\
& -x^2 & +x & \\
\cline{2-3}
& // & -x+1 & \\
& & x-1 & \\
\cline{3-3}
& & // \quad // &
\end{array}
$$

Conclusione:

$$x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$$

Quindi o $x=1$

o $x^2+x-1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

3 SOLUZ.

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ Devo provare tutte le fraz. $\frac{m}{n}$ in cui

m divide 6, n divide 1

Quindi devo provare $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$x = 1 \qquad 1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$

$x = -1 \qquad -1 - 4 - 1 + 6 = 0$ ok. $x = -1$ è soluz.

Divido per $x+1$ e mi riduco al II grado.

—o—o—

$18x^4 - 45x^3 + 16x^2 + 5x - 2 = 0$. Tentativi da fare: tutte le $\frac{m}{n}$ in cui m divide 2 e n divide 18.

$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{1}{18}$

$\pm 2 \qquad \pm \frac{2}{3} \qquad \pm \frac{2}{9}$

$x^{100} + x^2 + 1 = 0$ Non può avere radici reali perchè

sempre ≥ 0

è di sicuro ROBA ≥ 1.

— o — o —

LOGARITMI

$a^b = c$

VOGLIO RICAVARE a: elevo tutto alla $\frac{1}{b}$. Ottengo

$$\boxed{a = c^{\frac{1}{b}}}$$

Voglio ricavare b:

$$\boxed{b = \log_a c}$$

L'esponente al quale elevare a per ottenere c.

<u>Esempi</u>

$\log_2 8 = 3$ $\log_{10} 100 = 2$

$\log_3 27 = 3$ $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

$\log_2 \frac{1}{4} = \boxed{-2}$ perché $2^{\boxed{-2}} = \frac{1}{4}$

$\log_4 8 = x$. Allora $4^x = 8$ (definizione di log)

$(2^2)^x = 2^3$; $2^{2x} = 2^3$; $2x = 3$; $x = \frac{3}{2}$

$\log_4 8 = 3/2$.

Proprietà dei logaritmi

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\boxed{1}$

$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ $\boxed{2}$

$\log_a (x^k) = k \log_a x$ $\boxed{3}$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = \log_a\left(x\cdot y^{-1}\right) =$$

REGOLA $\boxed{1}$

$$= \log_a x + \log_a\left(y^{\boxed{-1}}\right) =$$

REGOLA $\boxed{3}$

$$= \log_a x - \log_a y$$

Quindi la $\boxed{2}$ è conseguenza di $\boxed{1}$ e $\boxed{3}$

— o — o —

FORMULA DI CAMBIO DI BASE

$a^x = b$

Per definizione : $\boxed{x = \log_a b}$

Faccio a dx e sx il log in base c

$$\log_c\left(a^x\right) = \log_c b$$

REGOLA $\boxed{3}$

$$x\cdot\log_c a = \log_c b$$

$$\boxed{x = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Uguagliando i 2 valori della x ottengo

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \quad (4)$$

$$\log_a (x+y) =$$

$$\log_a (x-y) =$$

NULLA DI FURBO!!!

$$\log_2 7 - \log_2 6 = \log_2 \left(\frac{7}{6}\right)$$

$\log_a x$ Questa scrittura sottintende

- $x > 0$
- $a > 0$ e $a \neq 1$

$\log_1 8$ = potenza a cui elevare 1 per ottenere 8
IMPOSSIBILE !!!

$\log_2 (-4)$ = IMPOSSIBILE : potenza a cui elevare 2 per ottenere -4.

$\log_a (1)$ = potenza a cui elevare a per ottenere 1

$= 0 \qquad (a^0 = 1$ per ogni $a)$

$\log_a (a) = 1$ qualunque sia a.

$$\log_3(2^{\boxed{4}}) = a\log_3(2)$$

$$4\log_3 2 \longrightarrow a = 4,$$

$$\log_3\sqrt{2} = \log_3 2^{\boxed{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\log_3 2$$

$$\log_2(8\cdot 16\cdot 64) = \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 64$$

$$= 3 + 4 + 6 = 13$$

$$\log_3(20) + \log_3(4) = \log_3(20\cdot 4) = \log_3 80$$

$$\log_5 3 - \log_5 2 = \log_5(3/2)$$

$$\log_2 a\cdot\log_2 b = \text{NDF}$$

$$\log_2 4\cdot\log_2 8 = 2\cdot 3 = 6$$

$$6 = \log_2 a \qquad 6 = \log_2 2^6 \qquad a = 2^6 = 64$$

$$2^{\log_2 a} = 9 \qquad x = \log_2 a$$

$$2^x = 9 \qquad x = \log_2 9 = \log_2 a \longrightarrow a = 9$$

In generale

$$\boxed{b^{\log_b a} = a}$$

b elevato all'esponente a cui elevare b per ottenere a.

$$\log_2 2^{\boxed{a}} = 9 \qquad a \cdot \underset{1}{\underbrace{\log_2 2}} = 9 \qquad a = 9$$

$$\log_2 (4^a) = 9 \;,\; \log_2 (2^{\boxed{2a}}) = 9 \;,\; 2a \underset{1}{\underbrace{\log_2 2}} = 9$$

$$2a = 9 \qquad a = 9/2.$$

$$2^{\log_4 a} = 9 \qquad x = \log_4 a$$

$$2^x = 9 \qquad x = \log_2 9$$

Ritornando in a:

CAMBIO IN BASE 2

$$\log_2 9 = \log_4 a = \frac{\log_2 a}{\log_2 4} = \boxed{\frac{1}{2}} \log_2 a$$

$$= \log_2 a^{\frac{1}{2}}$$

In conclusione

$$\log_2 9 = \log_2 a^{\frac{1}{2}} , \quad 9 = a^{\frac{1}{2}} , \quad a = 9^2 = 81$$

$2^{\log_a 3} = 2 \qquad x = \log_a 3 \qquad 2^x = 2$

$x = 1 \qquad \log_a 3 = 1 \qquad a = 3$

— o — o —

$\log_2 (\log_3 a) = 2 \qquad x = \log_3 a$

$\log_2 x = 2 \qquad x = 4$

$\log_3 a = 4 \longrightarrow a = 3^4 = 81$

$\log_3 a = 4 \; ; \; \log_3 a = 4 \cdot \underbrace{\log_3 3}_{=1} = \log_3 3^4$

$\log_3 a = \log_3 3^4 \longrightarrow a = 3^4$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\log_3 9} = \log_2 a$$

$$\log_2 a = 2$$

$$\log_2 a = \boxed{2} \cdot \log_2 2$$

$$\log_2 a = \log_2 2^2$$

$$a = 2^2$$

$$a = 4.$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\log_3 9} = \log_a 25$$

$$\log_a 25 = 2$$

$$\log_a 5^2 = 2$$

$$2 \log_a 5 = 2$$

$$\log_a 5 = 1 \qquad a = 5$$

$$\log_3 \sqrt{2} = a \log_3 4$$

$$\log_3 2^{\boxed{\frac{1}{2}}} = a \log_3 2^{\boxed{2}}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{\log_3} 2 = 2a \cancel{\log_3} 2$$

$$\frac{1}{2} = 2a \quad ; \quad a = \frac{1}{4}$$

$$\log_7 13 \cdot \log_5 7 = \log_5 a$$

CAMBIO BASE

$$\frac{\log_5 13}{\cancel{\log_5 7}} \cdot \cancel{\log_5 7} = \log_5 a$$

$$\log_5 13 = \log_5 a \rightarrow a = 13$$

$$\log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 a$$

CAMBIO IN BASE 2

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 49}{\log_2 8} = \log_2 a$$

$$\log_2 49 = \log_2 7^{\boxed{2}} =$$

$$= 2 \log_2 7$$

$$\frac{\log_2 3}{\cancel{\log_2 7}} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{\log_2 7}}{3} = \log_2 a \quad ; \quad \log_2 a = \boxed{\frac{2}{3}} \log_2 3$$

$$\log_2 a = \log_2 3^{\frac{2}{3}}, \quad a = 3^{2/3} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

— o — o —

$$2^8 + 2^{20} = 2^8 (1 + 2^a)$$

$$\cancel{2^8} + 2^{20} = \cancel{2^8} + 2^8 \cdot 2^a$$

$$2^{20} = 2^8 \cdot 2^a = 2^{8+a} \qquad 20 = 8 + a \qquad a = 12$$

Alternativa

$$2^8 + 2^{20} = 2^8 + 2^{8+12} = 2^8 + 2^8 \cdot 2^{12}$$

$$= 2^8 (1 + 2^{12})$$

$2^x = 3$

$x = \log_2 3$

$(2^x)^2 = 3$

$2^{2x} = 3$

$2x = \log_2 3$

$x = \frac{1}{2}\log_2 3 = \log_2 \sqrt{3}$

$2^{x^3} = 3$, $x^2 = \log_2 3$, $x = \pm\sqrt{\log_2 3}$ (2 soluz.)

$2^{3^2} = 2^9$

$2^{(3^2)}$

si fa prima l'esponenziale all'esponente

$(2^3)^2 = 2^6$

8^2

si fa prima la base

$$4 \cdot 2^{x^2} = 8^x \qquad 2^2 \cdot 2^{x^2} = (2^3)^x$$

$$2^{x^2+2} = 2^{3x}$$

$$x^2+2 = 3x \; ; \quad x^2-3x+2=0 \qquad x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

— o — o —

$$3 \cdot 2^{x^2} = 1 \qquad 2^{x^2} = \frac{1}{3} \qquad x^2 = \log_2 \frac{1}{3}$$

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\log_2 \frac{1}{3}} \quad \text{(2 soluzioni)}}$$ NO!!!!

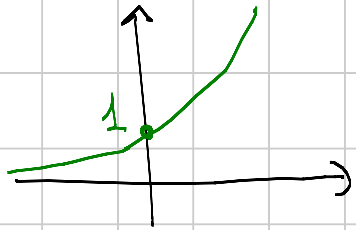
$$x^2 = \boxed{\log_2 \frac{1}{3}}$$ QUANTITÀ NEGATIVA

$\log_2$ (ROBA <1) è <0

$$\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3^{-1} = -\log_2 3$$

$x^2 =$ ROBA NEG $\Rightarrow$ 0 soluzioni

$$2^{x^2} = 2^{\text{ROBA} \geq 0} \geq 1$$



2^x

$$4^x - 2^{x+2} + 3 = 0 \qquad 2^{2x} - 2^{x+2} + 3 = 0$$

$$2^{2x} - 2^x \cdot 2^2 + 3 = 0 \qquad (2^x)^2 - 2^2 \cdot 2^x + 3 = 0$$

Pongo $t = 2^x$ $\qquad t^2 - 4t + 3 = 0$

$$t = \begin{cases} 1 \longrightarrow 2^x = 1 \longrightarrow x = \log_2 1 = 0 \\ 3 \longrightarrow 2^x = 3 \longrightarrow x = \log_2 3 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 2 soluzioni

$$2^x = 3^x$$

1° metodo: divido per 3^x $\quad \frac{2^x}{3^x} = 1$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$

$$x = \log_{\frac{2}{3}}(1) = 0$$

2° metodo: Faccio a dx e sx il log in base 41

$$\log_{41}(2^x) = \log_{41}(3^x)$$

$$x \log_{41} 2 = x \log_{41} 3 \;;$$

$$x \underbrace{(\log_{41} 2 - \log_{41} 3)}_{\neq 0} = 0 \longrightarrow x \text{ DEVE ESSERE } 0$$

$\log_2(x-1) = 5$ $\quad x-1=32 \quad x=33$

Con tutti i passaggi:

$\log_2(x-1) = 5$

$\log_2(x-1) = \boxed{5} \cdot \underbrace{\boxed{\log_2 2}}_{}$ 1

$\log_2(x-1) = \log_2(2^5)$ $\quad x-1=2^5$

$x-1=32 \quad x=33$

— o — o —

$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$ NO !!!!!!

$\log_2[(x-1)(x+1)] = 3\log_2 2$ $\boxed{\text{2 SOLUZIONI}}$

$\log_2(x^2-1) = \log_2 2^3 \; ; \; x^2-1=8 \; ; \; x^2=9 \; , \; x=\pm 3$

Provo a sostituire $x = 3$ $\qquad \log_2 2 + \log_2 4 = 3$

$$1 + 2 = 3 \qquad \text{Ok !!!}$$

Sostituisco $x = -3$: $\quad \log_2(\quad) + \log_2(\quad) = 3$

NON HANNO SENSO

Quindi: solo $x = 3$ è soluzione.

Morale: quando ci sono i logaritmi bisogna sempre controllare che gli argomenti siano > 0

—o—o—

$\log_x 3 = 9$ $\qquad$ Cambio in base 3:

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 x} = 9 \qquad \frac{1}{\log_3 x} = 9 \quad ; \quad \log_3 x = \frac{1}{9}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{9}\log_3 3 \quad ; \quad \log_3 x = \log_3 3^{\frac{1}{9}}$$

$$x = 3^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{3} .$$

— o — o —

$$\left(\log_2 (x+2)\right)^2 + 3\log_2 (x+2) = 4 \qquad t = \log_2 (x+2)$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

Prod : -4
Somma : -3

$$t = \begin{cases} -4 \longrightarrow \log_2 (x+2) = -4 & \text{①} \\ 1 \longrightarrow \log_2 (x+2) = 1 & \text{②} \end{cases}$$

① $\log_2 (x+2) = -4 \quad ; \quad \log_2 (x+2) = -4 \cdot \log_2 2$

$$\log_2 (x+2) = \log_2 2^{-4} \quad ; \quad x+2 = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

(2) $\log_2(x+2) = 1 = \log_2 2$; $x+2 = 2$; $x = 0$

— o — o —

$$\log_2 \sqrt{x} \cdot \log_2 \sqrt[4]{x} = 2^{-1}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \log_2 x \cdot \frac{1}{4} \log_2 x = \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$(\log_2 x)^2 = 4 \qquad \log_2 x = \pm 2$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$\log_2 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$