Titolo nota 18/09/2007

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt[a]{6}$$

$$2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{a}}$$

$$x^k \cdot y^k = (xy)^k$$

$$6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{a}} \longrightarrow a=2$$

— o — o —

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{a} \qquad \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{8}}$$

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}} \qquad \left(x^k\right)^k = x^{kk}$$

$$2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}}$$

$$a = 2^{\frac{1}{4}\cdot 8} = 2^2 = 4 \leftarrow \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^8 = \left(a^{\cancel{\frac{1}{8}}}\right)^{\cancel{8}}$$ elevo alla 8-va

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[a]{4} \quad ; \quad \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[a]{2^2} \quad ; \quad 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{2}{a}}$$

stessa base $\Rightarrow$ esp. uguali $\Rightarrow$ $\frac{3}{6} = \frac{2}{a}$ ; $\frac{1}{2} = \frac{2}{a}$ ; $a = 4$

— o — o —

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{a}} = 2^{-1} \quad ; \quad \frac{2^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = 2^{-1} \quad ; \quad 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = 2^{-1}$$

elevo alla $-6$

$$\left(\underbrace{2^{\frac{1}{3}}}_{x} \cdot \underbrace{a^{-\frac{1}{6}}}_{y}\right)^{\overbrace{-6}^{k}} = \left(2^{-1}\right)^{-6}$$

$(xy)^k = x^k y^k$

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{-6} \cdot \left(a^{-\frac{1}{6}}\right)^{-6} = \left(2^{-1}\right)^{-6}$$

$$2^{-2} \cdot a = 2^{6}$$

$$2^{-2} \cdot a = 2^6 \qquad \frac{a}{2^2} = 2^6 \qquad a = 2^6 \cdot 2^2 = 2^8$$

In alternativa:

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = 2^{-1}$$

Moltiplico dx e sx per $2^{-\frac{1}{3}}$

$$a^{-\frac{1}{6}} = 2^{-1} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$a^{-\frac{1}{6}} = 2^{-1-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}}$$

elevo alla $-6$ $\qquad a = 2^{-\frac{4}{3}(-6)} = 2^8.$

— o —

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[a]{4} = 2 \; ; \qquad 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{a}} = 2^1$$

$$x^k \cdot x^m = x^{k+m}$$

$$2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{a}} = 2^{1}$$ stessa base $\Rightarrow$ esp. uguali

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{2}{a} = 1$$ $\leadsto$ ricavo $a = 4$

— o — o —

$$\sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{a}$$ $\cancel{\boxed{a = 30}}$ NO!!!!!

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} =$$ Nulla di Furbo !!!

$$\sqrt{2^5} - \sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{2 \cdot 2^4} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^4} - \sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$$

$\boxed{3}\sqrt{2} = \sqrt{18}$ $\qquad 3\sqrt{2} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{18}$

$5\sqrt{2} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{50}$

$\sqrt{72} = \sqrt{36\cdot 2} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$

$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{?}$ $\qquad 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{a}$ $\rightsquigarrow$ ricavo a

$2\cdot 3^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$ elevo tutto al cubo:

$\left(2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3$ ; $\quad 2^3\cdot 3 = a$ , $\quad 24 = a$ .

# POLINOMI

$3x^{\boxed{4}} + 4x \boxed{-5}$ grado 4

termine noto

$$(3x^4 + 4x - 5)(x-2) = 3x^5 + 4x^2 - 5x - 6x^4 - 8x + 10$$

$$= 3x^5 - 6x^4 + 4x^2 - 13x + 10$$

Il grado del prodotto di 2 polinomi = somma dei gradi

(gli esponenti dei termini di grado massimo si sommano)

Il grado della somma di 2 polinomi è il grado più alto tra quelli dei polinomi sommati?

$\boxed{\text{N1}}$ Se i 2 polinomi che sto sommando hanno grado diverso, allora il grado della somma è il più grande dei gradi

Se i 2 polinomi che sto sommando hanno lo stesso grado, PUÒ succedere che i termini di grado max si semplifichino.

Es. $3x^2+2x+1$ $\quad -3x^2+6x-2$

Se sommo ottengo: $8x-1$

In ogni caso il grado può solo scendere o restare costante.

# DIVISIONE TRA POLINOMI

$$\cancel{2x^4} + 3x^3 - x^2 + 3x - 1 \quad \Big| \quad x^2 - 2x + 3$$

$$-\cancel{2x^4} + 4x^3 - 6x^2 \qquad \text{prod. con segno } -$$

$$\boxed{2x^2 + 7x + 7} \quad \text{QUOZIENTE}$$

$2x^4$ diviso $x^2$

$7x^3$ diviso $x^2$

$7x^2$ diviso $x^2$

$$\cancel{7x^3} - 7x^2 + 3x - 1$$

$$-\cancel{7x^3} + 14x^2 - 21x$$

$$\cancel{7x^2} - 18x - 1$$

$$-\cancel{7x^2} + 14x - 21$$

$$\boxed{-4x - 22} \quad \text{RESTO}$$

$2x^4 - 1 \;\Big|\; \underline{x^2-2x+3}$

Scriviamolo "con i buchi"

se questo coefficiente è 1, non vengono fuori frazioni strada facendo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2\cancel{x^4} & & & & -1 & x^2-2x+3 \\
\cline{6-6}
-2\cancel{x^4} & +4x^3 & -6x^2 & & & 2x^2+4x+2 \\
\hline
 & 4\cancel{x^3} & -6x^2 & & -1 & \\
 & -4\cancel{x^3} & +8x^2 & -12x & & \\
\hline
 & & 2x^2 & -12x & -1 & \\
 & & -2x^2 & +4x & -6 & \\
\hline
 & & & -8x & -7 & \leftarrow \text{resto}
\end{array}
$$

Quoziente

$$x^3 + x + 1 \quad \big| \; \underline{x-2}$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & & +x & +1 & \underline{x-2} \\
-\cancel{x^3} & +2x^2 & & & x^2+2x+5 \\
\hline
& 2\cancel{x^2} & +x & +1 & \\
& -2\cancel{x^2} & +4x & & \\
\hline
& & 5x & +1 & \\
& & -5x & +10 & \\
\hline
& & & 11 &
\end{array}
$$

Nota: quando divido un pol. $p(x)$ per $x-a$, il resto che ottengo è sempre un numero, e quel numero è $p(a)$, cioè quello che ottengo sostituendo a nel polinomio iniziale

Nel nostro caso:

$p(2) = 2^3 + 2 + 1 = 11$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + \boxed{2}ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + \boxed{3}a^2b + \boxed{3}ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + \boxed{4}a^3b + \boxed{6}a^2b^2 + \boxed{4}ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triangolo di
TARTAGLIA

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$(x+2)^4 = x^4 + 4\cdot x^3\cdot 2 + 6x^2\cdot 2^2 + 4\cdot x\cdot 2^3 + 2^4$$

$a = x$
$b = 2$

$$= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad$$
$$+2bc+2bd+2cd$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$$
$$+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2$$
$$+6abc$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

VALGONO QUANDO C'È SEGNO —

E STESSO ESPONENTE

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

QUELLE CON IL SEGNO + FUNZIONANO SOLO

CON ESPONENTI DISPARI

$a^2+b^2$
$a^4+b^4$ N.D.F.
$a^6+b^6$

$$a^4-b^2 = (a^2-b)(a^2+b)$$

$$x^2-y^2 = (x-y)(x+y) \quad \text{con } x=a^2,\ y=b$$

$a^6-b^6$ si può vedere in ~~tanti~~ modi

$$= (a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$$

$$= (a^3-b^3)(a^3+b^3)$$

$$x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$$
con $x=a^3$, $y=b^3$

$$= (a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$$

ho usato
$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$
con $x=a^2$, $y=b^2$

Volendo si può anche scrivere

$$a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$$

$$= \boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\ \boxed{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$a^8 - b^8 = (a^4+b^4)(a^4-b^4)$$

$$= (a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2)$$

$$= (a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

Eq. II grado $\quad ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 soluzioni

$\Delta < 0 \Rightarrow$ 0 soluzioni REALI

$\Delta = 0 \Rightarrow$ 1 soluzione

(2 radici coincidenti)
Espressione alternativa:
1 RADICE DI MOLTEPLICITÀ 2.

— o —

Trovare le radici = scomporre il polinomio

$x^2-5x+6=0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Le 2 soluzioni (cioè le 2 radici del polinomio) sono

$x_1 = 2, \quad x_2 = 3$. Da questo si ha che

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \qquad \text{Radici: } x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

Relazioni tra radici e coeff. di un pol. di II grado

Supponiamo che il coeff. di $x^2$ sia 1. Siano $x_1$ e $x_2$ le 2 radici. Allora

$x_1 + x_2$ = COEFF. DI $x$ CAMBIATO DI SEGNO

$x_1 \cdot x_2$ = TERMINE NOTO

$x^2 - x - 6 = 0$ Le radici (se ci sono) sono 2 numeri che moltiplicati danno $-6$ e sommati danno $1$

$3, -2$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

— o — o —

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $x^2 = t$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$$t_{1,2} = \cdots = \begin{cases} 4 & x^2 = 4 & x = \pm 2 \\ 1 & x^2 = 1 & x = \pm 1 \end{cases}$$

Quindi $x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ $\quad x^2 = t$ $\quad t^2 + 3t - 4 = 0$

Somma $= -3$ $\quad$ Prodotto $= -4$ $\quad t = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$

$t = -4$ $\quad x^2 = -4$ $\quad$ NULLA

$t = 1$ $\quad x^2 = 1$ $\quad x = \pm 1$ $\quad$ } 2 RADICI

La scomposizione, vista in $t$, sarebbe

$$t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4)$$

Vista in $x$ diventa

RADICE $-1$ $\quad$ RADICE $1$

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2-1)(x^2+4) = (x+1)(x-1)(x^2+4)$$

NON PRODUCE RADICI

$x^4 - 3x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 3) = 0$

$x^2 = 0$ $\quad$ $x^2 - 3 = 0$

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

$x = 0$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{3}$ $\quad$ 3 SOLUZIONI

$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

$(x^2 - 2)^2 = 0$

$\downarrow$

$x^2 - 2 = 0$

$\downarrow$

$x^2 = 2$

$\downarrow$

$x = \pm\sqrt{2}$ $\quad$ 2 SOLUZIONI

Scomposizione:

$$x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2 = (x + \sqrt{2})^{\boxed{2}} (x - \sqrt{2})^{\boxed{2}}$$

La molteplicità di una radice è l'esponente con cui il rispettivo fattore compare nella scomposizione

$\sqrt{2} \rightsquigarrow$ corrispondente fattore è $x - \sqrt{2}$

e compare con esponente 2, quindi

$\sqrt{2}$ è una radice di molteplicità 2

— o — o —

$4x^2 - 12x + 9 = 0$ $\qquad (2x-3)^2 = 0$

1 RADICE di molt. 2

$2x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3/2$