

Eq. Diff. LINEARI di qualunque ordine a coeff. costanti:

$$a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

a_0, a_1, \dots, a_m sono NUMERI, detti coefficienti

L'eq. si dice OMOGENEA $\Leftrightarrow f(t) = 0$

CASO OMOGENEO

1^a osservazione generale: l'interv. max di esistenza della soluzione è lo stesso di $f(t)$, quindi nel caso omogeneo è tutto \mathbb{R}

Teorema

L'insieme delle soluzioni di un' eq. diff. LINEARE OMOGENEA di ordine n (anche a coeff. non costanti)

è uno SPAZIO VETTORIALE di dimensione n.

Fissata una BASE $u_1(t), \dots, u_n(t)$ di questo spazio, tutti gli sl. si scrivono nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

Operativamente: se riesco a determinare UNA base, conosco la soluzione generale, cioè riesco a descrivere l'insieme delle infinite soluzioni.

Nel caso di equazioni a coeff. costanti, esiste una procedura che permette di determinare una base

"Esiste" a patto di saper trovare le radici di un polinomio di grado n.

CASO PARTICOLARE $n=2$

Ho un'eq. del tipo

$$au'' + bu' + cu = 0$$

Considero il polinomio
e ne calcolo le radici

$$ax^2 + bx + c$$

1^a possibilità

2 radici reali distinte λ, μ ($\Delta > 0$). Una
base è

$$e^{\lambda t}, e^{\mu t}$$

Dunque la soluz. generale è

$$u(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\mu t}$$

2^a possibilità

$\Delta = 0 \Rightarrow$ una radice reale λ di molt. = 2.

Una base è

$$e^{\lambda t}$$

$$te^{\lambda t}$$

Nota bene $te^{\lambda t}$ non è
multiplo di $e^{\lambda t}$ per una
costante, quindi
sono lin.
indip.

La soluz. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

3^a possibilità

$\Delta < 0 \Rightarrow$ 2 radici complesse coniugate

$$\alpha \pm i\beta$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Una base è

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

La soluz. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Perché funziona? Risposta furbetta: nei vari casi basta sostituire gli el. della base nell' eq. e vedere che la soddisfa !!!

Risposta un po' più motivata: cerco delle soluzioni dell' eq. che siano del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$

$$u(t) = e^{\lambda t} \quad u'(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Se sostituisco nell' eq. $au'' + bu' + cu = 0$ ottengo

$$e^{\lambda t} (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

\uparrow
 $\neq 0$ \downarrow

questo fa 0 $\Leftrightarrow \lambda$ è una radice del polinomio

- se ci sono 2 radici reali ho finito perché ho 2 sol. lin. indip.

- Se c'è una radice reale di mult = 2, ho trovato 1 soluz.
Mettendo "t davanti" e sostituendo si vede che se ne ottiene un'altra
- Se le 2 radici sono $\alpha \pm i\beta$, verrebbe da dire che una base è

$$e^{(\alpha+i\beta)t} \quad e^{(\alpha-i\beta)t}$$

ma

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t} &= e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} \\ &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

e questo rende plausibile che una base sia

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

EQ. DI ORDINE m

$$a_m u^m + \dots + a_1 u + a_0 = 0$$

Considero il polinomio

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Questo sui complessi ha m radici (contate con molteplicità)

- Ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molt. 1 produce $e^{\lambda t}$
- Ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molt. k produce: $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$
k elem. della base
- Ogni coppia $\alpha \pm i\beta$ di radici compl. coniugate di molt. 1 produce $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
- Ogni coppia $\alpha \pm i\beta \dots$ di molt. k produce $2k$ elem. della base
 $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), t^{k-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

MAT I TLC

ORA 47

Esempio 1

$$u'' + 5u' + 6u = 0$$

Polinomio: $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$(x+2)(x+3) = 0$$

Radici: $\lambda = -2, \lambda = -3$

Base: e^{-2t} e^{-3t}

Soluz. generale

$$u(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

Esempio 2

$$u'' + 4u' + 4u = 0$$

Polinomio: $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$(x+2)^2 = 0$$

Radici: $\lambda = -2$ di molt. = 2

Base: e^{-2t} , te^{-2t}

Soluz. generale:

$$u(t) = ae^{-2t} + bte^{-2t}$$

Esempio 3

$$u'' + 4u' + 13u = 0$$

Polinomio: $x^2 + 4x + 13 = 0$

Radici: $\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2}$

$$\Delta < 0$$

$$= \boxed{-2} \pm \boxed{3}i$$

$$\alpha \downarrow \quad \beta \downarrow$$

$$\alpha \downarrow \quad \beta \downarrow$$

Base: $e^{-2t} \cos(3t), e^{-2t} \sin(3t)$

Soluz. generale:

$$u(t) = a e^{-2t} \cos(3t) + b e^{-2t} \sin(3t)$$

Esempio 4

$$u'' - 4u = 0$$

Polinomio: $x^2 - 4 = 0$

Radici: $x = \pm 2$

Base: e^{2t}, e^{-2t}

Soluz. gen. :

$$u(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$$

Esempio 5

$$u'' - 4u' = 0$$

Polinomio : $x^2 - 4x = 0$
 $x(x-4) = 0$

Radici : $x=0, x=4$

Base : $e^{0t} = 1, e^{4t}$

Soluz. generale :

$$u(t) = a + be^{4t}$$

Esempio 6

$$u'' + 4u = 0$$

Polinomio : $x^2 + 4 = 0$

Radici : $x^2 = -4$

$x = \pm 2i$ (del tipo $\alpha \pm i\beta$ con
 $\alpha = 0$ e $\beta = 2$)

Base : $e^{0t} \cos(2t)$

$e^{0t} \sin(2t)$, cioè $\cos(2t), \sin(2t)$

Soluz. generale

$$u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$$

Esempio 7 $u'' + 2u' + u = 0$ Polinomio: $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

$$(x^2 + 1)^2 = 0$$

$$(x^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$$

Quindi le radici sono $\pm i$, entrambe di molt. = 2

$$(\alpha=0, \beta=1)$$

Soluz. generale: $u(t) = a \cos t + b \sin t + ct \cos t + dt \sin t$

— o — o — o —

EQUAZIONI NON OMOGENEE

Teorema La soluzione generale di un'eq. NON omogenea è della forma

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)}_{\text{SOLUZIONE GENERALE EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{SOLUZIONE QUALUNQUE DELL'EQ. NON OMOGENEA}}$$

SOLUZIONE GENERALE

EQ. OMOGENEA

SOLUZIONE **QUALUNQUE**

DELL'EQ. NON OMOGENEA

Operativamente : se conosco una soluzione QUALUNQUE $\bar{u}(t)$,
le conosco tutte.

Fatto base

Se $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono 2 soluz. dell'eq. non omogenea, allora $v_1 - v_2 = w$ è una soluzione dell'omogenea.

Nel caso di eq. del 2° ordine :

$$\left. \begin{array}{l} a v_1'' + b v_1' + c v_1 = f(t) \\ a v_2'' + b v_2' + c v_2 = f(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} v_1 \text{ e } v_2 \text{ soluz. della} \\ \text{non omog.} \end{array}$$

Sottraggo e ottengo

$$a(v_1'' - v_2'') + b(v_1' - v_2') + c(v_1 - v_2) = 0$$

$$a w'' + b w' + c w = 0 \Rightarrow w \text{ soluz. dell' OMOG.}$$

Dal fatto base segue il teorema. Siamo infatti

$\bar{u}(t)$ una soluz. qualunque della non omog.

$u(t)$ un'altra soluz.

Allora

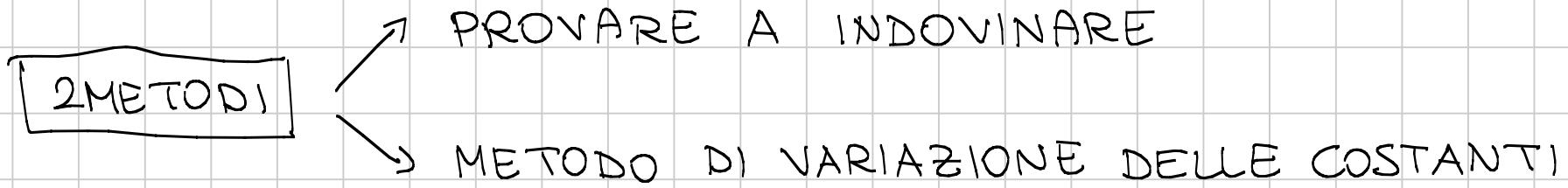
$$u(t) = \underbrace{[u(t) - \bar{u}(t)]}_{\text{SOLUZ. dell' OMOG.}} + \bar{u}(t)$$

SOLUZ. dell' OMOG., quindi della forma

$$c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

Bisognerebbe anche dim. che aggiungendo a $\bar{u}(t)$ una soluz. dell'omogenea si ottiene sempre un'altra sol. della non omog., ma questo si fa allo stesso modo (esercizio)

COME TROVARE UNA SOLUZ. QUALUNQUE DEL'EQ. NON OMOGENEA ?



Esempio 1

$$u'' + 5u' + 6u = e^t$$

Dovrò trovare una soluzione qualunque. È ragionevole cercare una soluzione del tipo

$$u(t) = \lambda e^t$$

Sostituisco $u'(t) = \lambda e^t$, $u''(t) = \lambda e^t$

$$u'' + 5u' + 6u = e^t$$

$$\lambda e^t + 5\lambda e^t + 6\lambda e^t = e^\lambda \quad |2\lambda e^t = e^t \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Una soluz. è $\bar{u}(t) = \frac{1}{12} e^t$

Sol. gen. : $u(t) = \frac{1}{12} e^t + \underbrace{ae^{-2t} + be^{-3t}}_{\text{SOLUZ. GEN. EQ.}}$

OMOGENEA

$$u'' + 5u' + 6u = 0$$

Esempio 2 $u'' + 5u' + 6u = e^{2t}$

Cerco una soluz. del tipo $u(t) = \lambda e^{2t}$

$$u'(t) = 2\lambda e^{2t} \quad u''(t) = 4\lambda e^{2t}. \text{ Sostituisco}$$

$$\underbrace{4\lambda e^{2t}}_{u''} + \underbrace{10\lambda e^{2t}}_{5u'} + \underbrace{6\lambda e^{2t}}_{6u} = e^{2t}$$

$$20\lambda e^{2t} - e^{2t} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{20}$$

\Rightarrow sol. gen.: $u(t) = \frac{1}{20} e^{2t} + a e^{-2t} + b e^{-3t}$

Esempio 3 $u'' + 5u' + 6u = e^{-2t}$ Tentativo: $u(t) = \lambda e^{-2t}$

$$u'(t) = -2\lambda e^{-2t}$$

$$u''(t) = 4\lambda e^{-2t}$$

Sostituisco: $4\lambda e^{-2t} - 10\lambda e^{-2t} + 6\lambda e^{-2t} = e^{-2t}$

$$u'' + 5u' + 6u$$

$$0 = e^{-2t} !!!$$

Doveva venire 0 perché e^{-2t} è sol. dell'eq. omog., cioè sostituito in $u'' + 5u' + 6u$ dà per forza 0.

Cont. esempio 3 : $u'' + 5u' + 6u = e^{-2t}$
 Questa è soluz. dell'omog.

Si può cercare una soluz. particolare del tipo $u(t) = \lambda t e^{-2t}$

$$u'(t) = \lambda e^{-2t} - 2\lambda t e^{-2t}$$

$$u''(t) = -2\lambda e^{-2t} - 2\lambda e^{-2t} + 4\lambda t e^{-2t}$$

$$\begin{aligned} & -4\lambda e^{-2t} + 4\lambda t e^{-2t} \\ & + 5\lambda e^{-2t} - 10\lambda t e^{-2t} \\ & + 6\lambda t e^{-2t} = e^{-2t} \end{aligned}$$

u'' $+ 5u'$ $+ 6u$

Le parti con il t se ne DEVONO ANDARE

Risposta $\lambda e^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow \lambda = 1$

Soluz. generale : $u(t) = te^{-2t} + ae^{-2t} + be^{-3t}$

In generale : se $f(t) = e^{\alpha t}$ il tentativo da fare è

$$u(t) = \lambda e^{\alpha t}$$

questo funziona sempre tranne quando $e^{\alpha t}$ è già sol.
dell'omog.

In tal caso si prova con

$$u(t) = \lambda t e^{\alpha t}$$

Questo ancora non funziona nel caso in cui $te^{\alpha t}$ è sol.
dell'omog., ma allora si prova con

$$u(t) = \lambda t^2 e^{\alpha t}$$
 e così via e prima o poi riesce.

Semi-analogamente se $f(t) = t e^{\alpha t}$ o più in generale

$f(t) = p(t) e^{\alpha t}$, si cerca una soluzione del tipo

$u(t) = q(t) e^{\alpha t}$, dove q è un pol. dello stesso grado di p a coeff. incogniti

Esempio 4 $u'' + 5u' + 6u = t^2 + 3$

Il tentativo da fare è un pol. dello stesso grado

$$u(t) = at^2 + bt + c \leftarrow \text{sempre polinomio completo}$$

$$u'(t) = 2at + b \quad u''(t) = 2a \quad \text{Sostituisco}$$

$$\underbrace{2a}_{u''} + \underbrace{10at + 5b}_{+ 5u'} + \underbrace{6at^2 + 6bt + 6c}_{+ 6u} = t^2 + 3$$

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 10a + 6b = 0 \\ 2a + 5b + 6c = 3 \end{cases}$$

coeff. t^3
coeff. b
termine NOTO

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{6} \\ 6b &= -10a = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \\ \Rightarrow b &= -\frac{5}{18} \end{aligned}$$

3^a eq \leadsto ricavo c.

Provare con un polinomio dello stesso grado funziona sempre, TRANNE quando ci sono polinomi tra le soluz. dell'omogenea.

Esempio 5 $u''' + u'' = t^2$

Eq. omogenea : $u''' + u'' = 0$ Polinomio : $x^3 + x^2 = 0$
 $x^2(x+1) = 0$

Radici : $\rightarrow x = 0 \rightarrow$ molt. 2 \Rightarrow produce 1, t
 $\rightarrow x = -1 \rightarrow$ molt. 1 \Rightarrow produce e^{-t}

Soluz. gen. eq. omogenea: $u(t) = a + bt + ce^{-t}$

Ora se ne una soluz. qualunque della non omogenea.

Verrebbe da provare $u(t) = at^2 + \underline{bt + c}$. Questo fallisce
SOL. OMOG.

Metto una t

$$u(t) = t(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + \underline{ct}$$

SOL. OMOG.

Metto t^2 :

$$u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$$

$$u'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct, \quad u''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$$

$$u'''(t) = 24at + 6b$$

$$\underbrace{24at + 6b}_{u''' \quad \text{+}} + \underbrace{12at^2 + 6bt + 2c}_{u''} = t^2$$

$$\begin{cases} 12a = 1 \\ 24a + 6b = 0 \\ 6b + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{si risolve}$$

N.B. Provando con il generico pol. di grado 4

$$u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

si riescono a determinare a, b, c , ma non d ed e .
 Ci MANCHEREBBE !!! Infatti i coeff. di d ed e sono
 liberi, che si possono fissare a piacere.

Esempio 6 $u'' + 5u' + 6u = \cos(2t)$

Tentativo : $u(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$

$$u'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t)$$

$$u''(t) = -4\lambda \cos(2t) - 4\mu \sin(2t)$$

Sostituisco :

$$\underbrace{-4\lambda \cos() - 4\mu \sin()}_{u''} \underbrace{-10\lambda \sin + 10\mu \cos}_{+5u'} \underbrace{+6\lambda \cos + 6\mu \sin}_{+6u} = \cos$$

$$\begin{cases} -4\lambda + 10\mu + 6\lambda = 1 & \text{coeff. } \cos(2t) \\ -4\mu - 10\lambda + 6\mu = 0 & \text{coeff. } \sin(2t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda + 10\mu = 1 \\ 2\mu - 10\lambda = 0 \end{cases}$$

$$1^{\text{a}} \text{ eq.} - 5 \cdot 2^{\text{a}} \text{ eq : } 2\lambda + 50\lambda = 1 ; 52\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{52}$$

--- \rightarrow si trova μ .

In generale: se al II membro c'è $\cos(\alpha t)$ oppure $\sin(\alpha t)$
il tentativo da fare è

$$u(t) = \lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)$$

Non funziona se $\cos(\alpha t)$ e $\sin(\alpha t)$ sono già sol. dell'omog.
In questo caso basta "aggiungere t davanti" finché basta.

Analogo per $f(t) = p(t) \sin(\alpha t)$, $p(t) \cos(\alpha t)$.

E se $f(t) = 3 + t^2 + \cos(6t) + e^{5t}$

→ o si fa un tentativo che contiene i singoli tentativi

→ o si risolve con un percorso per volta e poi si sommano le soluzioni (FUNZIONA PERCHÉ LINEARE).