

## INTEGRALI IN PIÙ VARIABILI (2 variabili)

1. Come si indicano (notazione)
2. Significato geometrico
3. Come si definiscono (definirebbero)
4. Come si calcolano

## 1. Notazione

Ingradiuti base:

\* un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  LIMITATO (zona di integrazione)

\* una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  LIMITATA (integrandi)

cioè esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che  
 $-M \leq f(x,y) \leq M$  per ogni  $(x,y) \in A$

L'integrale di  $f(x,y)$  in  $A$  si indica

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

integrale doppio       $\iint$        $A$       variabili di integrazione  
zona      ↑      integranda

STESO SIGNIFICATO

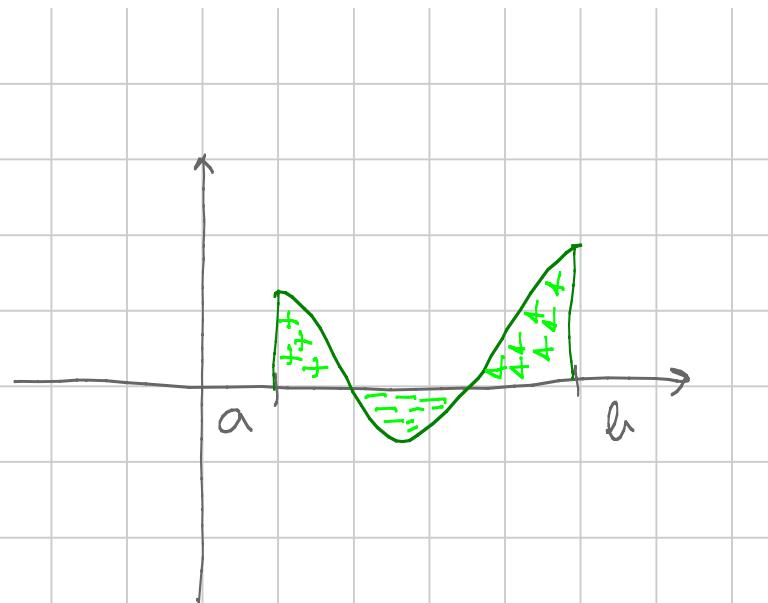
$$\int_A f(x,y) dx dy$$

## 2 [SIGNIFICATO GEOMETRICO]

In 1 variabile

$\int_a^b f(x) dx =$  "area con segno  
della parte di piano  
composta fra il grafico  
e l'asse  $x$ "

= somma aree zone + meno aree zone -



In 2 variabili:  $\iint_A f(x,y) dxdy =$  volume [con segno] della  
parte di spazio compresa fra  
il grafico ed il piano base  
 $xy$ .  
i volumi delle zone dove  $f \geq 0$  contano con il segno +,  
i volumi dove  $f \leq 0$  con il segno -.

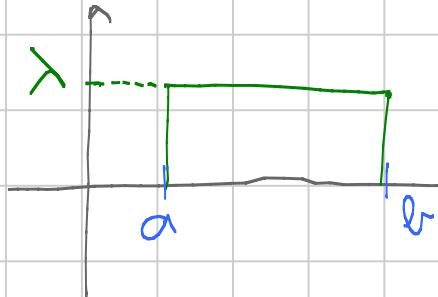
### 3 DEFINIZIONE (IDEA)

1 variabile: come si definisce

$$\int_a^b f(x) dx ?$$

#### CASO BANALE

$f(x)$  è uguale ad una costante  $\lambda$  per ogni  $x \in [a,b]$



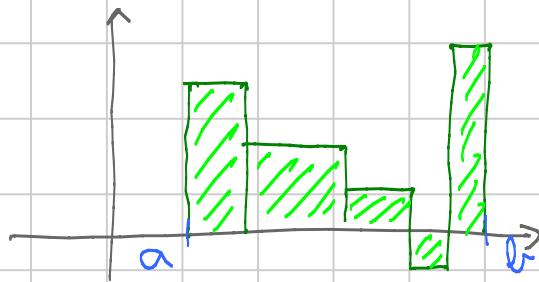
$$\int_a^b f(x) dx = \text{area con segno del rettangolo}$$

$$= (b-a) \lambda$$

FUNZIONE A GRADINI - STEP FUNCTION

#### CASO SEMIBANALE

$f(x)$  è costante a tratti in  $[a,b]$

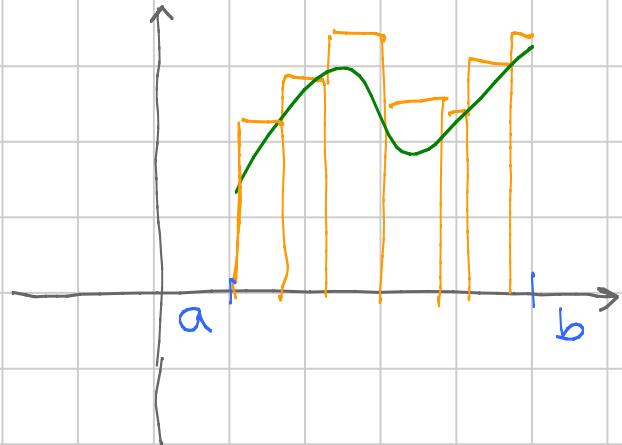


$$\int_a^b f(x) dx = \text{somma algebrica delle aree}$$

$$\text{con segno dei vari rettangoli}$$

## CASO GENERALE

$f(x)$  è una qualunque funzione limitata

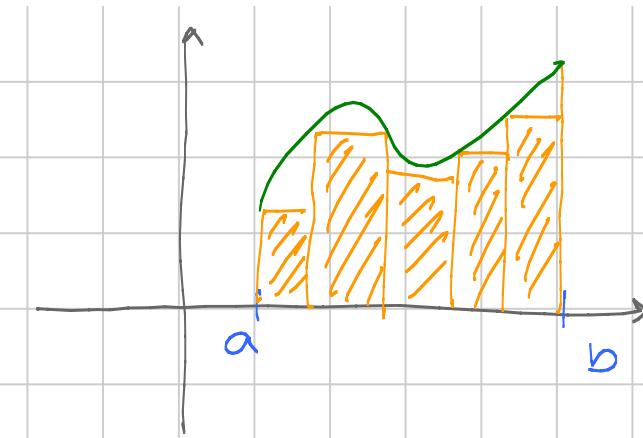


Si definiscono l'integrale superiore  
 $I^+(f; [a,b])$  e l'integrale inferiore

$I^-(f; [a,b])$  nel seguente modo

$$I^+(f; [a,b]) = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è una qualunque funzione a gradini} \geq f(x) \text{ in } [a,b] \right\}$$

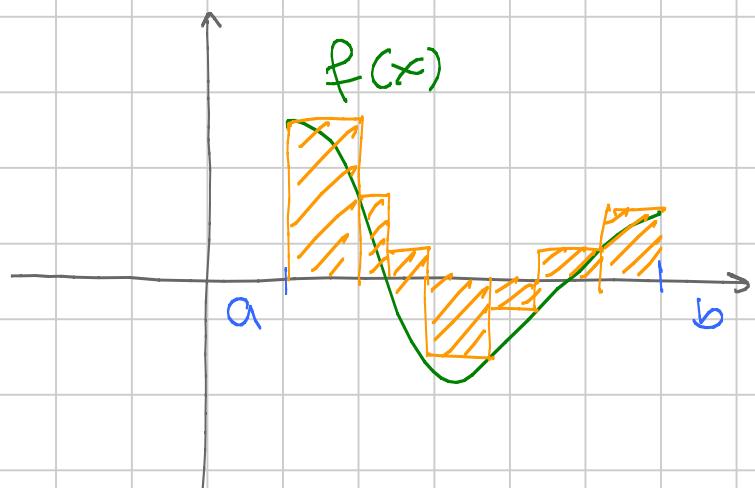
$$I^-(f; [a,b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è a gradini e} \leq f(x) \text{ in } [a,b] \right\}$$



Che relazione c'è fra  $I^+$  e  $I^-$ ?

In generale  $I^+ \geq I^-$ .

Se accade che  $I^+ = I^-$  si dice che  $f(x)$  è integrabile in  $[a, b]$  (secondo RIEMANN) e il valore comune si dice integrale.

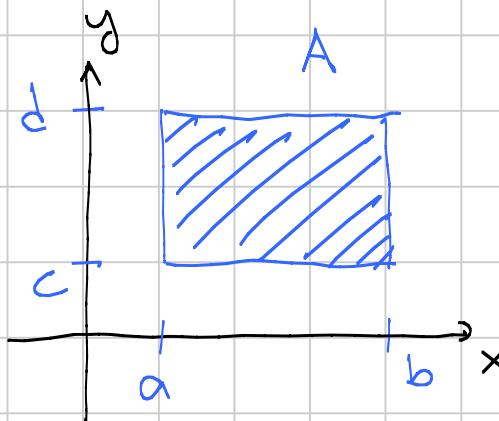


funzione a gradino  $\geq f(x)$

In 2 variabili

**CASO BANALE**

$A = \text{rettangolo con lati paralleli agli assi}$   
 $= [a, b] \times [c, d]$



$f(x, y) = \text{costante } \lambda \text{ su tutto il rettangolo.}$

$\iint_A f(x, y) dx dy = \text{volume con segno del parallelepipedo}$

$$= \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\substack{\text{altezza} \\ \text{con segno}}} \underbrace{\text{Area base}}_{(\text{sempre } > 0)}$$

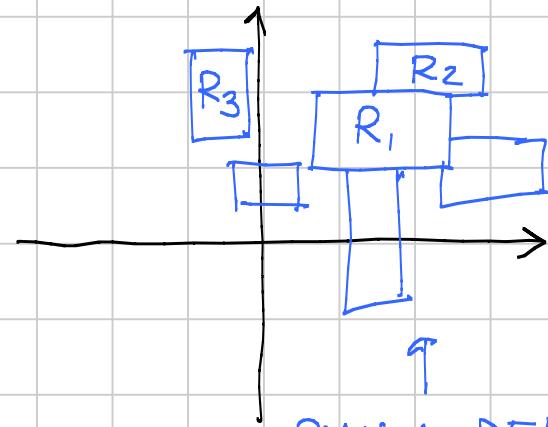
## CASO SEMI BANALE

Funzioni semplici  
Funzioni a gradino  
Step functions

} SINONIMI  
(sistema di grattacieli)

Unione A = unione finita di rettangoli  
con lati paralleli agli assi:  
 $R_1, \dots, R_k$

$f(x, y) = \text{costante } \lambda_i$  su ogni rettangolo  
 $R_i$



PIANTA DEI  
GRATTACIELI

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \text{somma algebrica dei volumi dei singoli parallelep.}$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{Area}(R_i) = \text{volume con segno dei grattacieli}$$

## CASO GENERALE

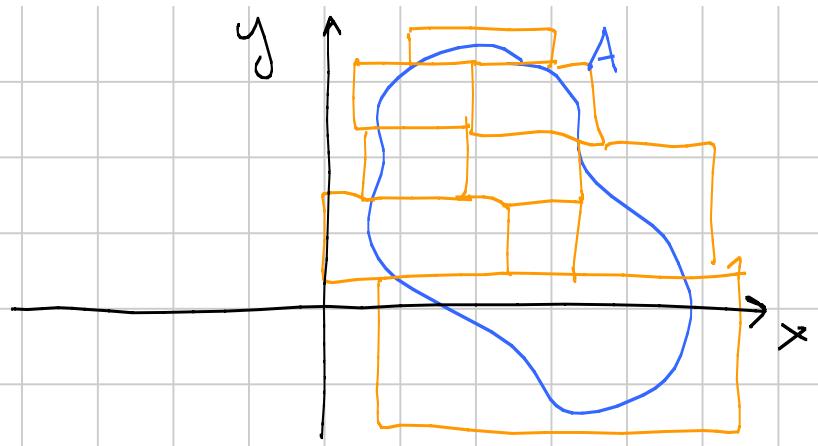
A insieme limitato qualunque  
 $f$  funzione limitata qualunque.

$$I^+(f; A) = \inf \left\{ \iint \varphi(x,y) dx dy : \begin{array}{l} \varphi(x,y) \text{ è una qualunque} \\ \text{funzione a gradini t.c.} \\ \varphi(x,y) \geq f(x,y) \text{ in } A \end{array} \right\}$$

↑  
dove  $\varphi$  è definita

$$I^-(f; A) = \sup \left\{ \dots : \varphi(x,y) \dots \varphi(x,y) \leq f(x,y) \text{ in } A \right\}$$

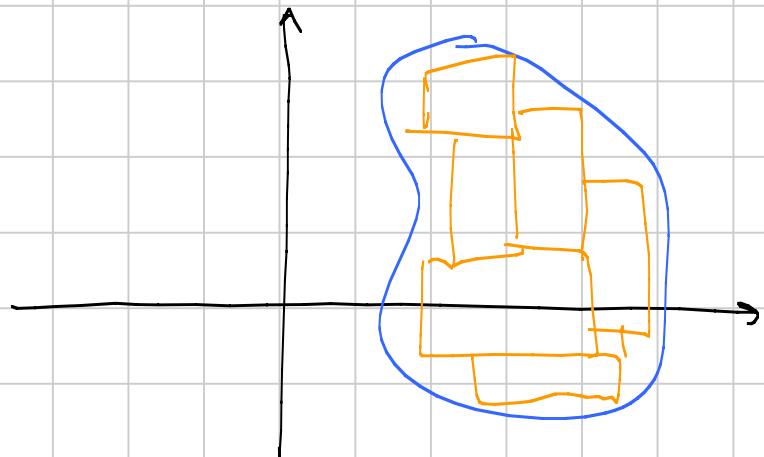
In generale  $I^+ \geq I^-$ . Se accade che  $I^+ = I^-$ , si dice che  
 $f$  è integrabile ed il valore comune si dice integrale di  $f$  in  $A$ .



$f(x,y) > 0$  in  $A$

In più variabili oltre allo  
"sfioramento in altezza"  
c'è anche uno "sfioramento  
sulla base"

insieme di definiz.  
di una  $\varphi(x,y)$  a gradini  $\geq f(x,y)$  in  $A$



insieme def.  
di  $\varphi(x,y) \leq f(x,y)$  in  $A$

# ANALISI II

AN  
NUA.

ORA 27

## TECNICHE DI CALCOLO

Gli integrali doppi si calcolano mediante le FORMULE DI RIDUZIONE

1 int. doppio = 2 int.  
in una var.

### FORMULA DI RIDUZIONE SUI RETTANGOLI

Supponiamo che  $A$  sia un rettangolo con lati paralleli

$$\text{agli assi} \quad A = [a, b] \times [c, d]$$

$f(x, y)$  funzione limitata qualsiasi

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Esempio 1

$$A = [0,1] \times [0,2]$$

$$f(x,y) = x+2y$$

$$\iint_A (x+2y) dx dy = \int_0^1 dx \left[ \int_0^2 (x+2y) dy \right]$$

calcolo questo integrale risp. alla  
variabile  $y$  facendo sì che  $x$   
sia una costante (parametro)

$$= \int_0^1 dx \left[ xy + y^2 \right]_{y=0}^{y=2}$$

primitiva di  
 $x+2y$  rispetto  
alla variabile  $y$

$$= \int_0^1 dx [2x+4] = \text{da qui in poi è}  
un integrale della  
sola  $x$$$

$$= \left[ x^2 + 4x \right]_{x=0}^{x=1} = 1+4 = [5]$$

primitiva di  
 $2x+4$  rispetto  
alla variabile  $x$

La formula di riduzione si può anche scrivere nella forma

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

primitiva di  $x+2y$   
rispetto ad  $x$

$$\iint_A (x+2y) dx dy = \int_0^2 dy \int_0^1 (x+2y) dx = \int_0^2 dy \left[ \frac{x^2}{2} + 2xy \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_0^2 dy \left[ \frac{1}{2} + 2y \right] = \left[ \frac{y}{2} + y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{2} + 4 = [5]$$

Esempio 2  $A = [1, 2] \times [2, 3]$   $f(x, y) = xy^2$

$$\begin{aligned} \iint_A xy^2 dx dy &= \int_1^2 dx \int_2^3 xy^2 dy = \int_1^2 dx \left[ x \frac{y^3}{3} \right]_{y=2}^{y=3} = \int_1^2 dx \left[ 9x - \frac{8}{3}x \right] = \\ &= \int_1^2 \frac{19}{3}x dx = \left[ \frac{19}{6}x^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \dots \end{aligned}$$

↑  
primitiva  
risp. a y

In alternativa

$$\iint_A xy^2 \, dx \, dy = \int_2^3 dy \int_1^2 xy^2 \, dx = \int_2^3 dy \left[ \frac{x^2}{2} y^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \text{controllare che coincida}$$
$$= \int_2^3 dy \left[ 2y^2 - \frac{1}{2}y^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \int_2^3 \frac{3}{2}y^2 \, dy = \left[ \frac{y^3}{2} \right]_{y=2}^{y=3} = \dots$$

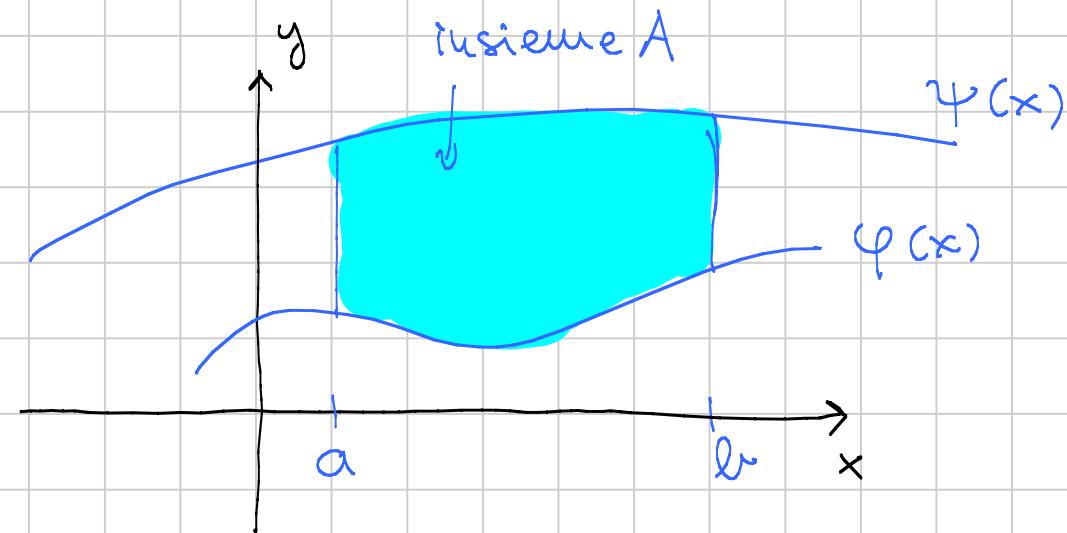
$$\iint_A xy^2 \, dx \, dy = \int_2^3 dy \int_1^2 x y^2 \, dx = \int_2^3 y^2 \, dy \int_1^2 x \, dx =$$
$$= \int_2^3 y^2 \, dy \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=2} =$$
$$= \int_2^3 y^2 \, dy \left[ 2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{2} \int_2^3 y^3 \, dy$$

è una costante quando integro risp. a x, quindi può uscire

## INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE $x$

È un insieme del tipo :

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$



Data  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

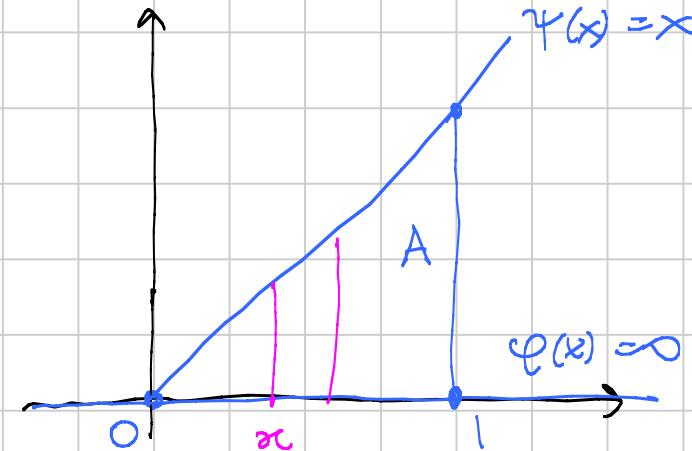
Esempio 1

$A = \text{triangolo con vertici in } (0,0), (1,0), (1,1)$

$$f(x,y) = xy$$

L'insieme  $A$  è normale rispetto all'asse  $x$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq x\}$$



$$\iint_A xy \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^x xy \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_0^x y \, dy =$$

$$= \int_0^1 x \, dx \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x}$$

primitiva  
di  $y$  risp. a  $y$

$$= \int_0^1 x \cdot \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

Esempio 2

$A = \text{triangolo con vertici in } (0,0), (1,0), (0,1)$

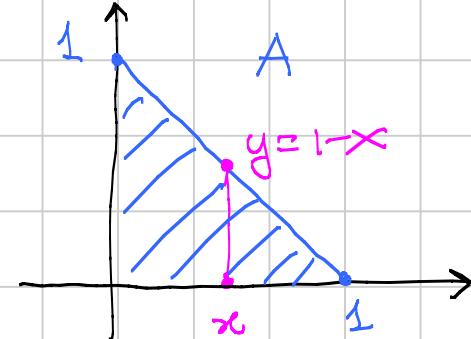
$$f(x,y) = x^2y$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq 1-x\}$$

$$\iint_A x^2y \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x^2y)$$

$$= \int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y dy = \int_0^1 x^2 dx \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx = \dots$$



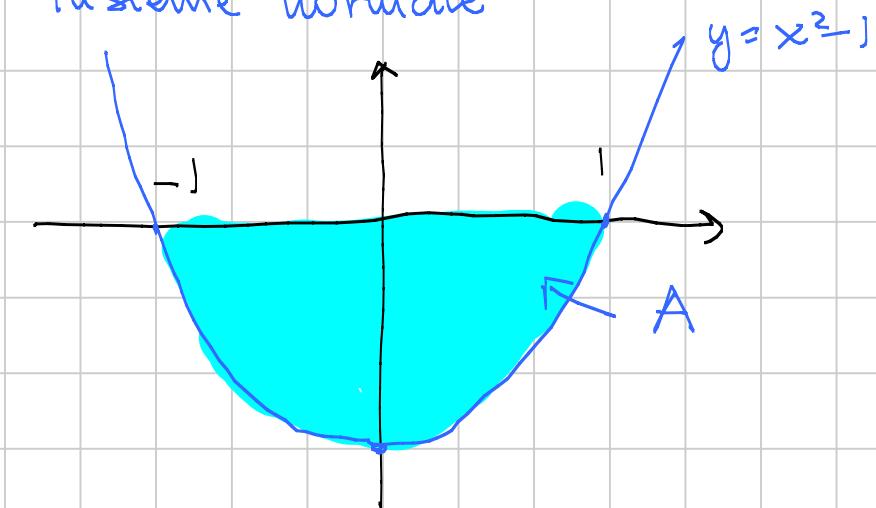
Esempio 3

$$f(x,y) = x$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1+x^2 \leq y \leq 0\}$$

Non è una scritt. come  
insieme normale

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1],  
-1+x^2 \leq y \leq 0\}$$



$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^0 x \, dy$$

$$= \int_{-1}^1 x \, dx \int_{x^2}^0 1 \, dy = \int_{-1}^1 x \, dx [y]_{y=x^2}^{y=0}$$

$$= \int_{-1}^1 x [0 - (x^2 - 1)] \, dx = \int_{-1}^1 x(1-x^2) \, dx = 0$$

funzione  
disponi su  
intervallo

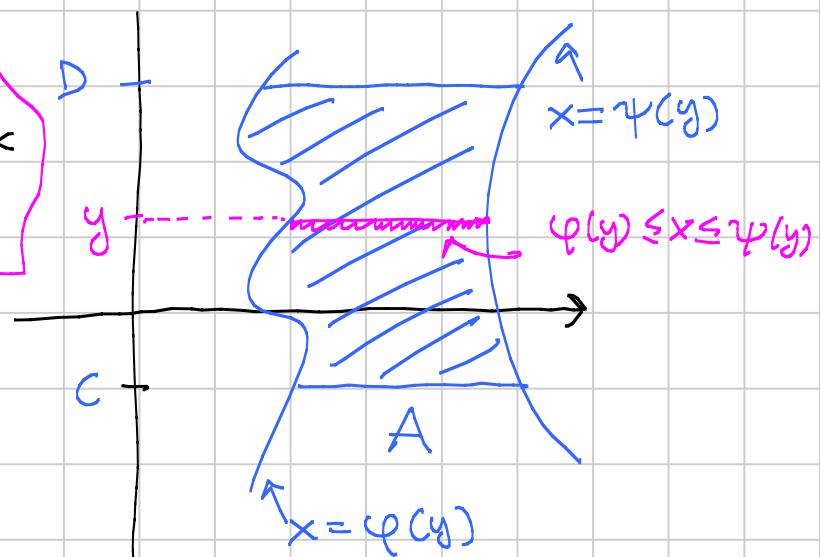
$[-A, A]$ .

[INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE Y]

Si presentano nella forma

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$$

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) dx$$



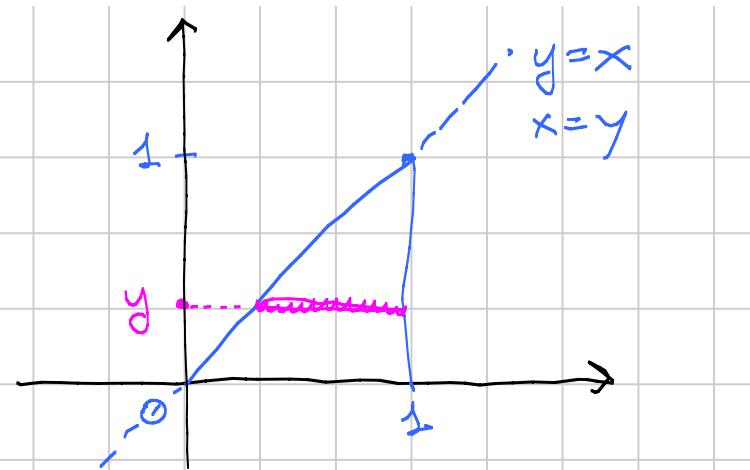
Esempio 1

È normale rispetto  
asse y?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 1\}$$

$$\begin{aligned}\iint_A xy \, dx \, dy &= \int_0^1 dy \int_y^1 x \, dx (x \circ y) \\ &= \int_0^1 y \, dy \int_y^1 x \, dx = \int_0^1 y \, dy \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y (1 - y^2) \, dy =\end{aligned}$$

controllare che  
venga come prima.



## Esempio 2

$$\iint_A y \, dx \, dy =$$

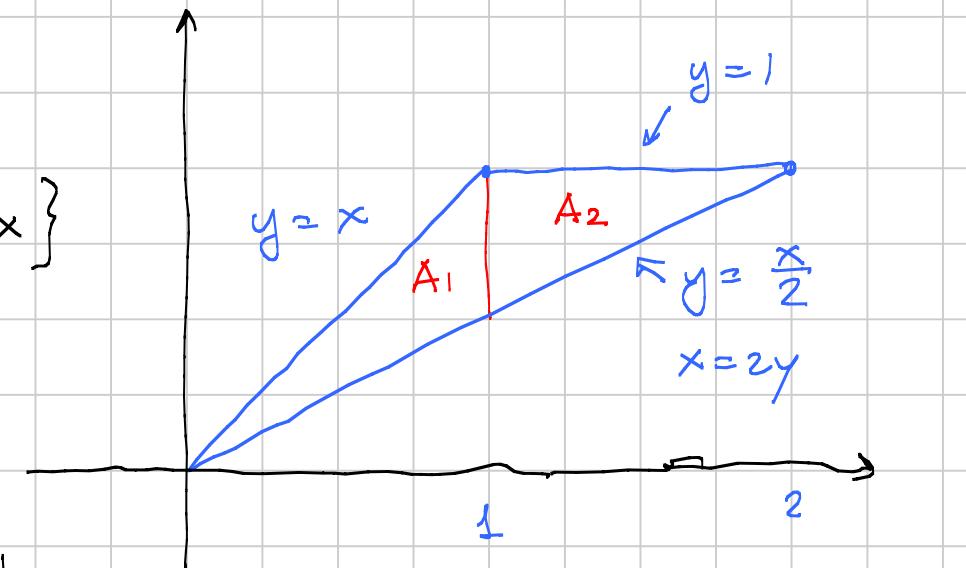
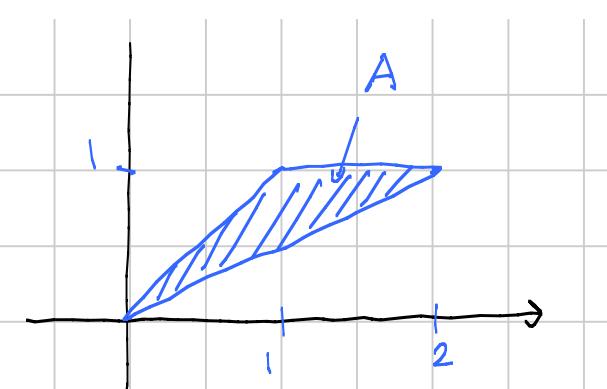
Ragioniamo rispetto asse x

$$= \iint_{A_1} y \, dx \, dy + \iint_{A_2} y \, dx \, dy =$$

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \frac{x}{2} \leq y \leq x\}$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2], \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy \quad y + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 y \, dy = \dots$$



Ragioniamo rispetto asse y

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \in [0, 1], y \leq x \leq 2y\}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_{y}^{2y} dx \cdot y$$

$$= \int_0^1 y \, dy \int_y^{2y} 1 \, dx$$

Parentesi generate:

$$\int_a^b 1 \, dx = b - a$$

= lunghezza interv.

controllare che  
venga lo stesso

Esempio 3

$$A = [0, 2] \times [0, 1]$$

$$f(x, y) = |y - x|$$

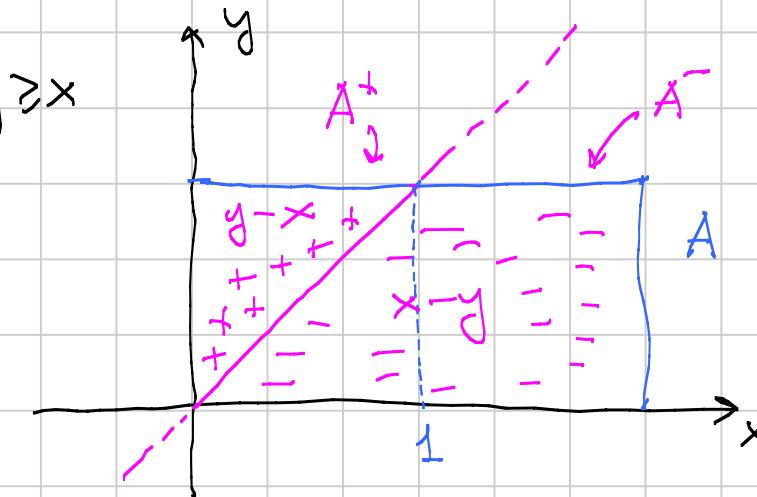
$$|y - x| = \begin{cases} y - x & \text{dove } y - x \geq 0, \text{ cioè } y \geq x \\ x - y & \text{dove } y - x \leq 0 \end{cases}$$

$$\iint_A |y - x| dx dy =$$

$$= \iint_{A^+} (y - x) dx dy + \iint_{A^-} (x - y) dx dy =$$

$$A^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x \leq y \leq 1\}$$
 NORMALE ASSE x

$$A^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], y \leq x \leq 2\}$$
 NORMALE ASSE y



$$= \int_0^1 dx \int_x^1 dy (y-x) + \int_0^1 dy \int_y^2 dx (x-y) = \dots$$

SIMMETRIE

(= calcoli risparmiati)

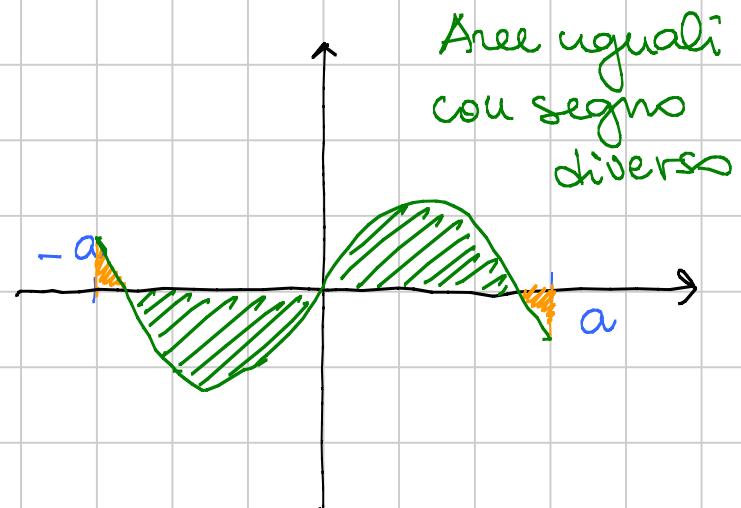
Caso classico in 1 variabile . Sia  $f(x)$  una funzione

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

Fare cambio di  
variabile  $y = -x$

DISPARI



Se invece  $f(x)$  è PARI

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

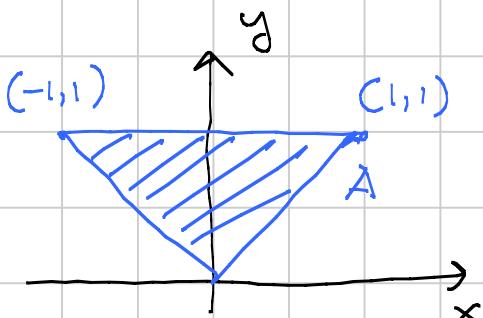
IMPORTANTE È LA SIMMETRIA DELL'INTERVALLO.

Esempio 1

$$\iint_A x dx dy = 0$$

$x$  è positiva nel triangolo destro

$x$  è neg. " " sinistro



I 2 volumi si compensano

Esempio 2

$$\iint_A y dx dy$$

di sicuro è positivo perché  $y > 0$   
all'interno di tutto il  $\nabla$

$$= 2 \iint_{\Delta} y \, dx \, dy \quad \text{sempre per simmetria}$$

Esempio 3  $\iint_A |x| \, dx \, dy$  di sicuro è positivo ( $|x| \geq 0$  dentro)

$$= 2 \int_{\Delta} x \, dx \, dy$$

Esempio 4

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

II  
O

$$\iint_A y \, dx \, dy$$

II  
O

$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

>0 perché  
 $xy \geq 0$  nel I e  
III quadrante.

