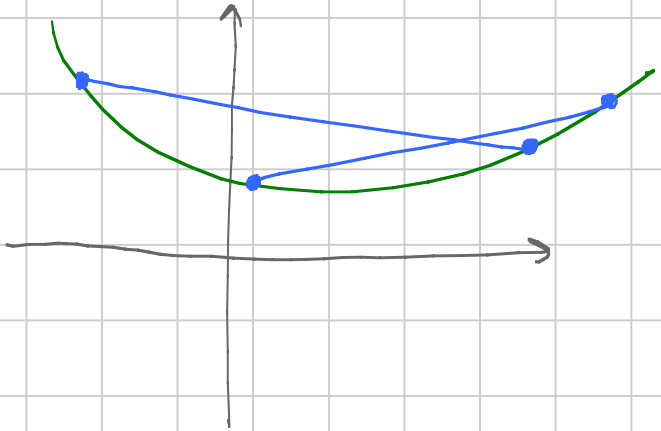
ANALISI II CIV (NUCL.)

ORA 21

Titolo nota 07/11/2006

CONCAVITÀ e CONVESSITÀ in 2 o più variabili



In 1 variabile: una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni coppia di punti del grafico il segmento che li unisce sta tutto sopra il grafico.

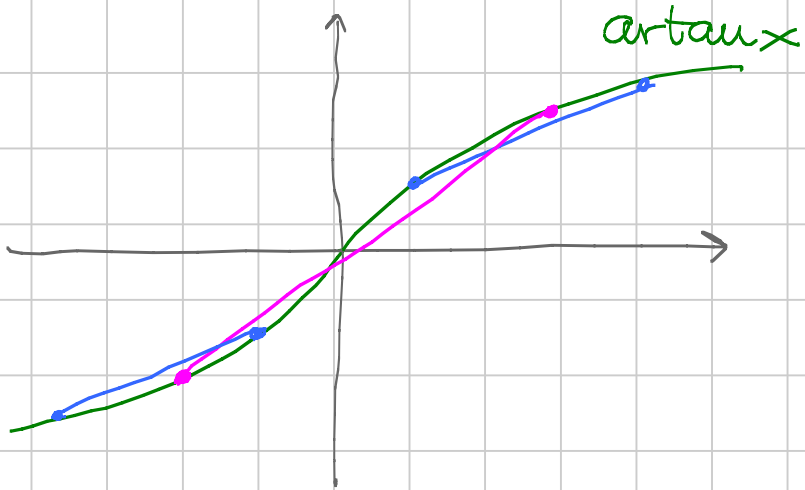
Si dice concava se il segmento sta sotto.

Stessa cosa se la funzione è definita solo su un intervallo o una semiretta.

Concava per $x \geq 0$

convessa per $x \leq 0$

Né concava, né convessa su tutto $\mathbb{R}$



In 2 o più variabili è la stessa cosa. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è CONVESSA se per ogni coppia di p.ti del grafico, il segmento che li congiunge sta tutto sopra.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ concava e convessa contemp.

$\Updownarrow$

$f(x) = ax + b$ (retta)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ concava e conv. contemp.

$\Updownarrow$

$f(x,y) = ax + by + c$ (piano)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che esista f''. Allora

f CONVESSA in $[a,b] \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

In 2 variabili

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Supponiamo che f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} esistano.

Allora:

f convessa in $\mathbb{R}^2 \iff Hf(x,y)$ semidef. pos. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

<u>Esempio 1</u> $f(x,y) = x^4 + y^6$. $\quad f_x = 4x^3, \quad f_y = 6y^5$

$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = 0 \qquad f_{yy} = 30y^4$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 30y^4 \end{pmatrix}$$

Matrice diago $\Rightarrow$ autov. = ciò che sta sulla diagonale
$\Rightarrow$ autov. ≥ 0 $\Rightarrow$ semidef. pos. $\Rightarrow$ CONVESSA su tutto $\mathbb{R}^2$

Punti staz.? Solo $(0,0)$. $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ BDH

$(0,0)$ è in realtà p.to di min loc. (e anzi globale) perché $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) > 0$ altrove.

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$$

vale se $\rho \geq 1$ (sto usando che $\rho^6 \geq \rho^4$)

Infatti $\underbrace{x^4+y^6}_{+\infty} = \rho^4 \cos^4\theta + \rho^6 \sin^6\theta \geq \rho^4(\cos^4\theta + \sin^6\theta)$

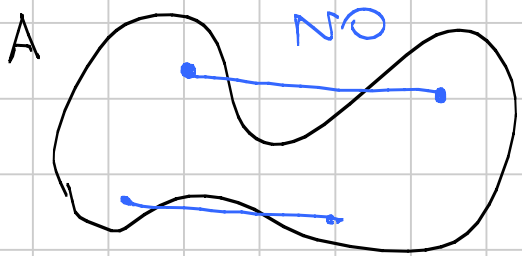
$$\geq \underbrace{\boxed{m\rho^4}}_{+\infty}$$

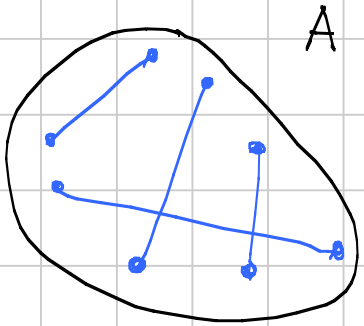
$$m = \min\{\cos^4\theta + \sin^6\theta : \theta \in [0, 2\pi]\} > 0$$

$f : A \to \mathbb{R}$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Supponiamo Hf esista

f convessa in A $\iff$ $Hf(x,y)$ semidef. pos. $\forall (x,y) \in A$

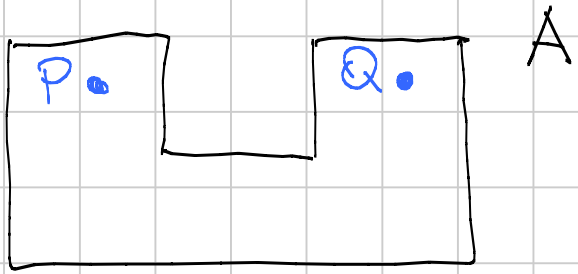
Tutto ciò vale purchè l'insieme A sia a sua volta CONVESSO





SI convesso

<u>Oss.</u> Non ha senso parlare di funzione convessa definita su un insieme non convesso



i punti del grafico che stanno sulla verticale di P e Q determinano un segmento che non può stare sopra/sotto il grafico

Differenza grossa tra 1 e 2 variabili

<u>Esempio 2</u> $f(x,y) = xy$ $\quad f_x = y \quad f_y = x$

$f_{xx} = 0 \quad f_{xy} = 1 \quad f_{yy} = 0$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det $= -1 \Rightarrow$ autov: $+, -$

$\Rightarrow$ non definita pos/neg

$\Rightarrow f(x,y)$ non è né CONCAVA né CONVESSA da nessuna parte

<u>Esempio 3</u> $f(x,y) = x^4 + y^4 + 3xy$

$f_x = 4x^3 + 3y \qquad f_y = 4y^3 + 3x$

$$\sup\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = +\infty \qquad (y=0,\ x \text{ enorme})$$
$$\max\{\qquad\qquad\qquad\qquad\} \quad \text{N.E.}$$

Esiste min? SI, per il WEIERSTRASS esteso in quanto

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$$

$$\underbrace{x^4+y^4+3xy}_{+\infty} = \rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + 3\rho^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$\geq \underbrace{\boxed{m\rho^4 - 3\rho^2}}_{+\infty} \qquad \boxed{m>0}$$

Il min viene assunto per $(x,y) = (0,0)$? NO

Infatti $\quad f(x,y) = 3xy + o(x^2+y^2)$

$\Rightarrow$ $f(x,y)$ in $(0,0)$ si comporta come xy, dunque ha una sella, dunque $(0,0)$ non può essere tra i p.ti di min.

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{yy} = 12y^2 \qquad f_{xy} = 3$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 3 \\ 3 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} < 0 \Rightarrow \text{sella}$$ (altro modo di vederlo)

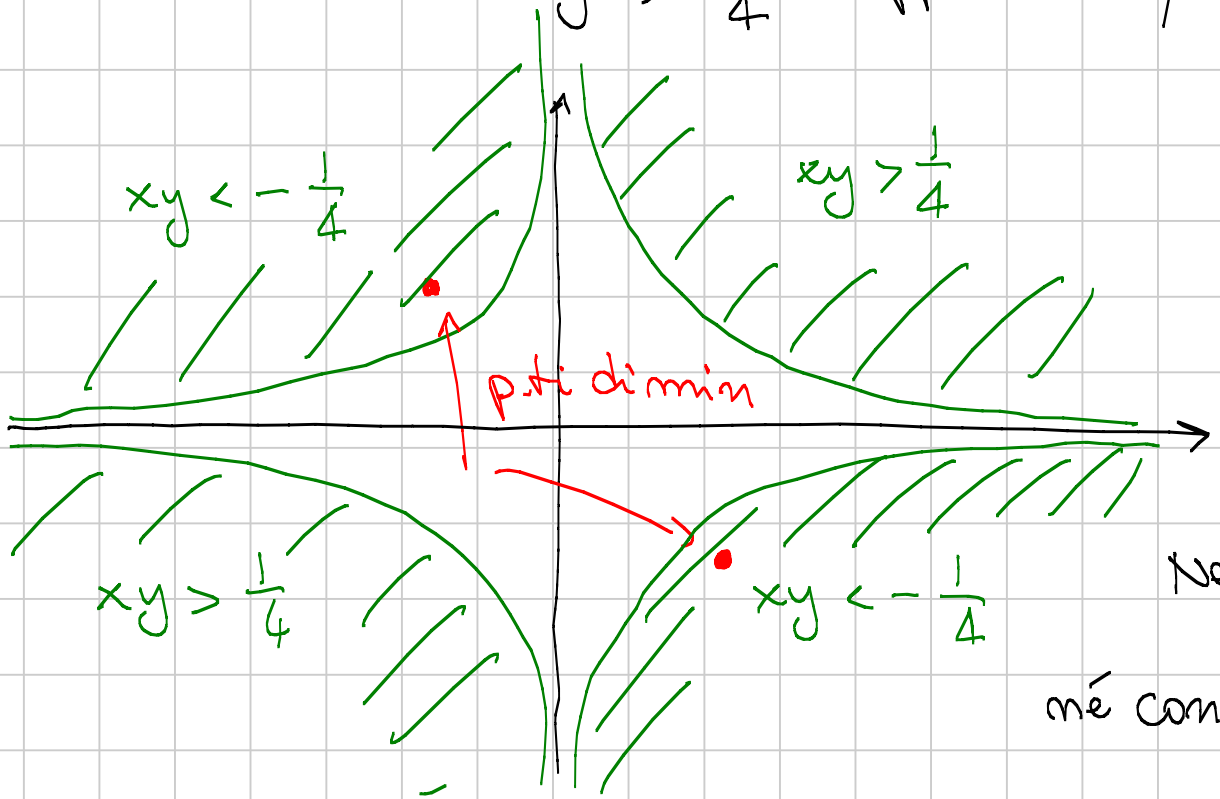
Per quali (x,y) la matrice è def. pos.?

$$\text{Det} = 144x^2y^2 - 9 \qquad \text{Tr} = 12(x^2+y^2) \geq 0$$

sempre

$$\text{Det} \geq 0 \iff 16x^2y^2 \geq 1 \quad , \quad x^2y^2 \geq \frac{1}{16} \quad ,$$

$$\iff xy \geq \frac{1}{4} \quad \text{oppure} \quad xy \leq -\frac{1}{4}$$



In ciascuna delle 4 zone

$\left.\begin{array}{l}\text{Det} \geq 0 \\ \text{Tr} \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ semidef. pos.

$\Downarrow$

CONVESSA

Nel resto Det < 0

$\Downarrow$

né convessa, né concava

Per es.: calcolare i p.ti di min. $\quad f(-x,-y) = f(x,y)$

ANALISI II CIV

ORA 22

Esempio $f(x,y) = x^2y^2 - x^4 - y^4$

$\inf\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = -\infty$ ($y=0$, x enorme)

Ponendo $x^2 = z$, $y^2 = w$ diventa $zw - z^2 - w^2$. Lo studio del segno di questa è lo studio di una forma quadratica.

$$zw - z^2 - w^2 = -(z^2 + w^2 - zw) = -\left(z^2 - 2z\cdot\frac{w}{2} + \frac{w^2}{4} + \frac{3w^2}{4}\right)$$

$$= -\left(z - \frac{w}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}w^2$$

$$x^2y^2 - x^4 - y^4 = -\left(x^2 - \frac{y^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}y^4 \leq 0 \quad \text{sempre}$$

e $=0 \iff y=0$ e $x=0$

Conclusione $\max\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = 0$

$\sup$ - - $= 0$

p.to di max : $(0,0)$

$f_x = -4x^3 + 2xy^2$ $\qquad$ $f_y = -4y^3 + 2yx^2$

$f_{xx} = -12x^2 + 2y^2$, $\quad f_{yy} = -12y^2 + 2x^2$, $\quad f_{xy} = 4xy$

Quali sono i p.ti staz. ?

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -2x^3 + xy^2 = 0 \\ -2y^3 + yx^2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(y^2 - 2x^2) = 0 \\ y(x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

1ª eq.

$\nearrow$ $x = 0 \xrightarrow{2^a \text{ eq.}} y = 0 \longrightarrow (0,0)$

$\searrow$ $\boxed{y^2 = 2x^2}$

$\nearrow$ $y = 0 \longrightarrow x = 0 \longrightarrow (0,0)$

$\searrow$ $\boxed{x^2 = 2y^2}$

$y^2 = 2x^2$

$x^2 = 2y^2$

$y^2 = 8y^4 \rightarrow y = 0$ già trovato

$\rightarrow 1 = 8y^2 \rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$

$\downarrow$

$x^2 = 2y^2 = \frac{1}{4}$

NO

$y^2 = 2x^2 = 4y^2$

$y^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

$\Rightarrow$ l'unico p.to staz. è $(0,0)$

— o — o —

<u>Esempio</u> $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$

$\inf\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = -\infty$ $(y=0,\ x$ enorme$)$

Metto $x = y \Rightarrow f(x,x) = x^4 - 2x^2$ x enorme

$\Rightarrow \sup\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = +\infty$

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + o(x^2+y^2)$$

Vicino a $(0,0)$ $f(x,y)$ si comporta come $-(x^2+y^2) \Rightarrow$ max. loc.

Quali sono i p.ti staz.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2xy^2 - 2x = 0 \\ 2yx^2 - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(y^2-1) = 0 \\ y(x^2-1) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{1^a \text{ eq.}}$

$$\nearrow \; x = 0 \xrightarrow{2^a \text{ eq.}} y = 0 \longrightarrow (0,0)$$

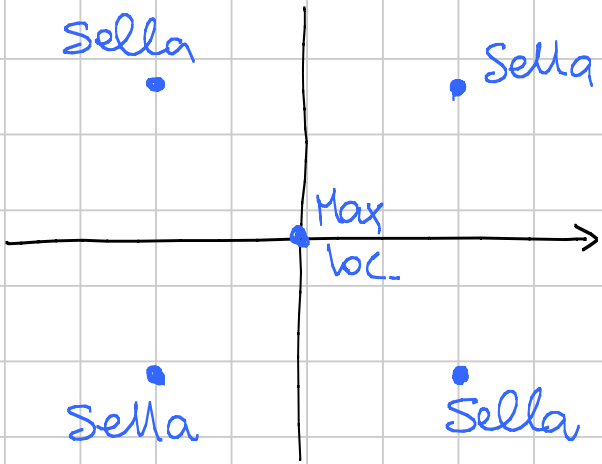
$$\searrow \; y = \pm 1 \xrightarrow{2^a \text{ eq.}} x = \pm 1 \longrightarrow (\pm 1, \pm 1)$$

4 poss.

Abbiamo 5 p.ti staz.

$$f_{xx} = 2y^2 - 2 \qquad f_{yy} = 2x^2 - 2$$

$$f_{xy} = 4xy$$



$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2-2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2-2 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} y^2-1 & 2xy \\ 2xy & x^2-1 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Autov: } -1,-1 \Rightarrow \text{def. neg.}$$

$\Downarrow$

p.to max locale

$$Hf(1,1) = 2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} = -4 < 0 \Rightarrow \text{sella}$$

$$Hf(-1,-1) = Hf(1,1)$$

$$Hf(1,-1) = 2\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} = -4 < 0 \Rightarrow \text{sella}$$

Zone di concavità e convessità:

$$\text{Det}\left[Hf(x,y)\right] = (x^2-1)(y^2-1) - 4x^2y^2$$

$$= x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 - 4x^2y^2$$

$$= -x^2 - y^2 - 3x^2y^2 + 1$$

$$\text{Tr}\left[Hf(x,y)\right] = x^2 + y^2 - 2$$

Ci sono zone in cui sicuramente è concava? Sì, vicino al p.to di max locale. Infatti se (x,y) sono vicini a $(0,0)$ si ha $\text{Det} > 0$, $\text{Tr} < 0$ $\Rightarrow$ autov: $-,-$ $\Rightarrow$ def. neg.

$\Downarrow$

concava (semi)

Ci sono zone in cui è convessa? Deve essere Hf def. pos.

$\Rightarrow$ autov: $+,+$ $\Rightarrow$ $\text{Det} > 0$, $\text{Tr} > 0$

Se ci sono zone di convessità, ci sono per $x^2+y^2 \geq 2$, cioè fuori dal cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$

Ma in tali zone

$-(x^2+y^2) - 3x^2y^2 + 1$ è di sicuro neg. quindi

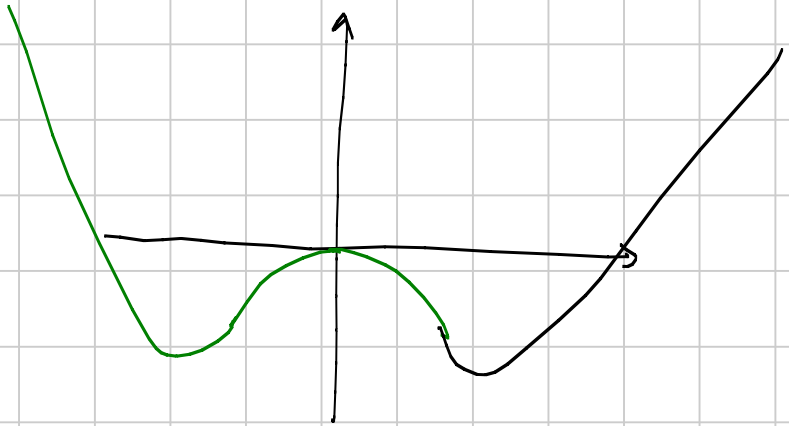
$\text{Det} < 0$

ANALISI 2 CIV.

ORA23

Occhio all'intuizione!

In una variabile:
max loc. nell'origine
sup $= +\infty$

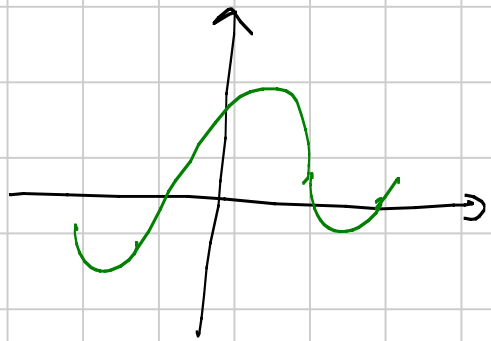


$\Rightarrow$ min. locali
e zone di convessità

In più variabili è falso

— o — o —

$\boxed{\text{HARD}}$ In una variabile, se ci sono 2 p.ti di min. loc, per forza in mezzo c'è un p.to di max loc.



In 2 variabili esiste una funzione $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con tutte le derivate di ogni ordine che ha solo 2 p.ti stazionari, i quali sono entrambi min locali.

TROVARE L'ESEMPIO È DIFFICILE.

<u>Esempio</u> $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2$

$\sup\{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \} = +\infty$ ($x=0$, y enorme)

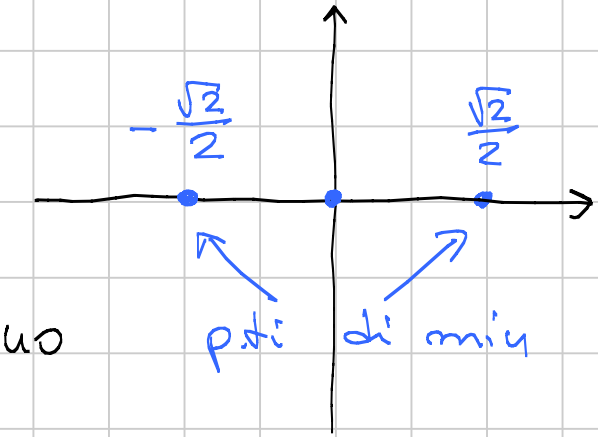
minimo esiste perchè $\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$

$$\underbrace{x^4+y^4-x^2}_{\to +\infty} = \rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) - \rho^2\cos^2\theta \geq \underbrace{\boxed{m\rho^4 - \rho^2}}_{\to +\infty}$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 4x^3 - 2x = 0 \rightarrow 2x(2x^2-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ 4y^3 = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

3 p.ti stazionari



Basta sostituire per vedere quale/i sono i p.ti di max / min

$$f(0,0) = 0, \quad f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$\min\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = -\frac{1}{4}$ p.ti di min $(x,y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$(0,0)$ che p.to staz. è ?

Taylor: $f(x,y) \sim -x^2 + o(x^2+y^2)$

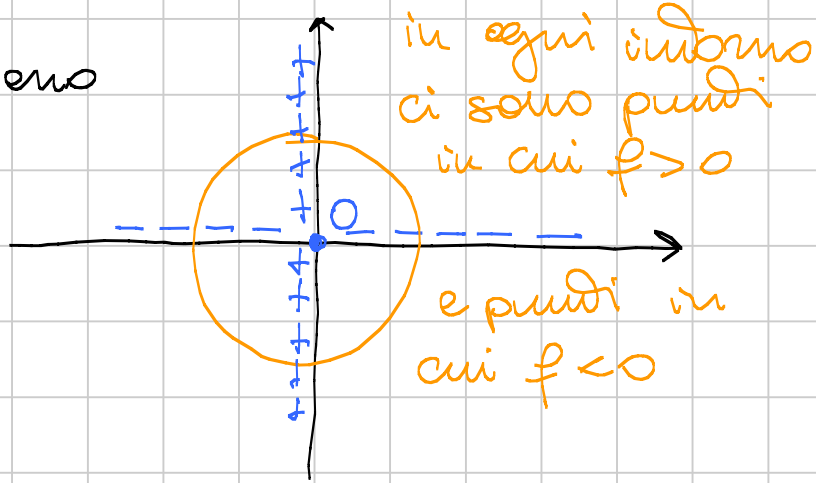
$\boxed{\Rightarrow \text{ si comporta come } -x^2 \Rightarrow (0,0) \text{ max. loc.}}$ NO !!!!!

"Si comporta come" vuol dire che in $(0,0)$ hanno la stessa matrice Hessiana, quindi

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det} = 0 \Rightarrow \text{BOH}$$

$\rightarrow$ semidef. neg.

$\Rightarrow$ l'$Hf(0,0)$ non permette di concludere quale tipo di p.to staz. è $(0,0)$, o per lo meno permette solo di dire che non si tratta di min/loc.



$f(x,0) = x^4 - x^2$, che come

funzione di 1 var. ha un max locale nell'origine, quindi vicino a $x=0$ è negativa

$\Rightarrow$ $(0,0)$ non è né max, né min locale.

— o — o —

<u>Esempio</u> $f(x,y) = y^2 + \cos x$. L'origine è staz.? Di che tipo?

$$f(x,y) = y^2 + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2+y^2) \quad \text{per } (x,y) \to (0,0)$$

Non ci sono termini di 1° grado $\Rightarrow$ $(0,0)$ p.to staz.

$Hf(0,0)$ è come quello di $y^2 - \frac{x^2}{2}$ $\quad Hf = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ p.to di sella.

Se fosse $f(x,y) = y^4 + \cos x^4$. L'origine è staz.? Di che tipo?

$$f(x,y) = y^4 + 1 - \frac{x^8}{2} + o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{15}\right)$$

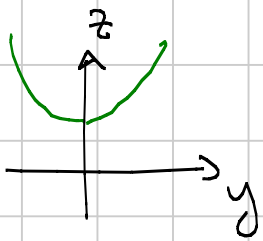
$$= \quad 1 \quad + o(x^2+y^2)$$

$\Rightarrow$ no termini di 1° grado $\Rightarrow$ $(0,0)$ p.to staz.

no termini di 2° grado $\Rightarrow$ $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ BOH

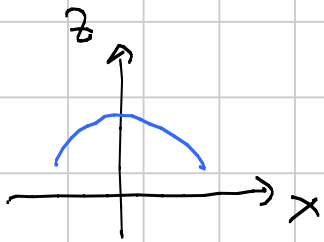
Lungo asse y

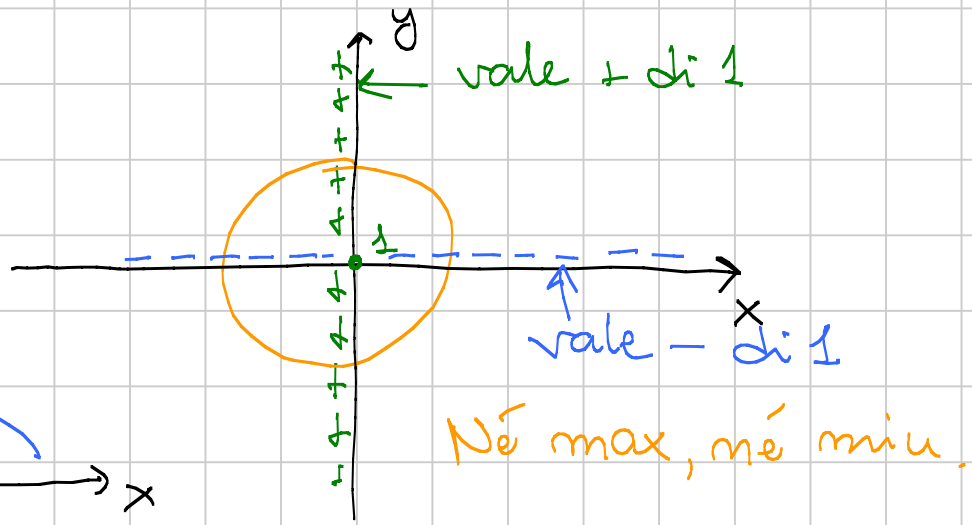
$f(0,y) = y^4+1$



Lungo asse x

$f(x,0) = \cos x^4$





Né max, né min.

Calcolare $\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \left\{ |y^4 + \cos x^2| : x \in [-5,5], y \in [-1,1] \right\}$

Inizio studiamo il problema senza val. assoluto

$$\max \left\{ y^4 + \cos x^2 : x \in [-5,5], y \in [-1,1] \right\} = 2$$

$y^4 + \cos x^2 \leq 1 + 1 = 2$ p.ti di max sono tutti i p.ti in cui $y = \pm 1$ e $\cos x = 1$

$y^4 + \cos x^2 \geq 0 - 1 = -1$ p.ti di min sono tutti i p.ti in cui $y = 0$ e $\cos x = -1$

Senza val. assoluto $\max = 2$

$\min = -1$

Quindi con il val. assd. $\max = 2$
$\min = 0$

p.ti di max: i precedenti

p.ti di min: tutti i punti in cui $y^4 + \cos x^2 = 0$

$$\begin{matrix}\max \\ \min\end{matrix} \left\{ \underbrace{e^{\arctan |y^4 + \cos x^2|^3}}_{\text{si ottiene dal precedente componendo con la funzione}} : x \in [-5,5],\ y \in [-1,1] \right\}$$

$e^{\arctan t^3}$ ← Funzione crescente

$t = |y^4 + \cos x^2|$ ← funzione di prima

Se voglio $e^{\arctan t^3}$ grande, devo usare il t + grande che posso

piccolo + piccolo

$\Rightarrow$ i p.ti di max e min sono gli stessi di prima.