

# ANALISI II

Titolo nota

CIV  
(NUCL)

ORA 16

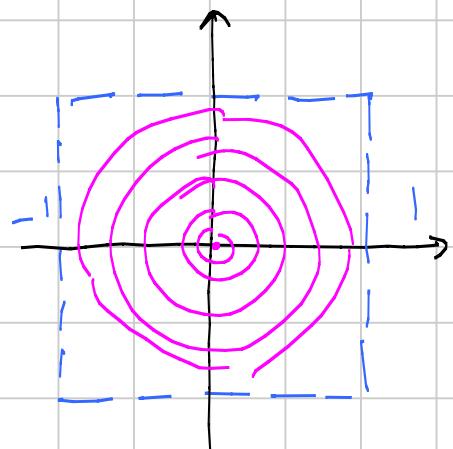
24/10/2006

- Introduzione ai pb. di max / min su insiemi non limitati (non chiusi)
- limiti all'  $\infty$  per funzioni di + variabili
  - ↳ coord. polari
- Metodo dei minimi ondabi
- Studio locale di funzioni di + variabili

MAX / MIN su insiemi limitati, ma non chiusi

Non si può applicare Weierstrass  $\Rightarrow$  max e min non sono obbligatori ad esistere

Esempio 1 Max / min di  $f(x,y) = x^2 + y^2$  sul quadrato  $(-1,1) \times (-1,1)$



min = 0 p.t.o di min: (0,0)

max: N.E. [il max vorrebbe essere nei  
4 vertici che però non apparten-  
gono all'insieme]

valore di  $f(x,y)$   
nei 4 vertici

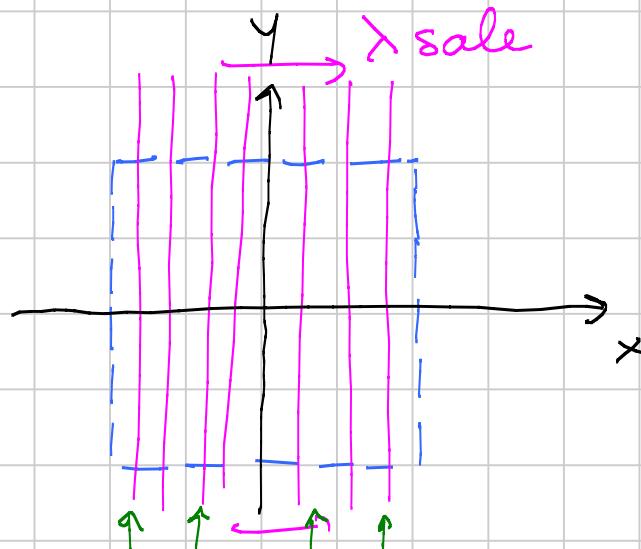
In generale: devo calcolare (se esistono) max/min di  $f(x,y)$  su un insieme  $A$  limitato, ma non chiuso.

Se si può, risolvo il problema sulla "diusura di  $A$ " ( $A$  unito  
il suo bordo). Qui max e min esistono per  $f$ .

Occorre che  
 $f$  si estenda  
Insieme quando se i pti di max/min stanno in  
 $A$  o sul bordo,

alla diusura  
in modo continuo

Esempio 2  $A = (-1, 1) \times (-1, 1)$



$$f(x,y) = \frac{1}{1-x}$$

max (min N.E.)

$$f(x,y) = \lambda$$

$$\frac{1}{1-x} = \lambda$$

$$1-x = \frac{1}{\lambda}$$

$$x = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

Il min vorrebbe essere sul lato di sx, quindi

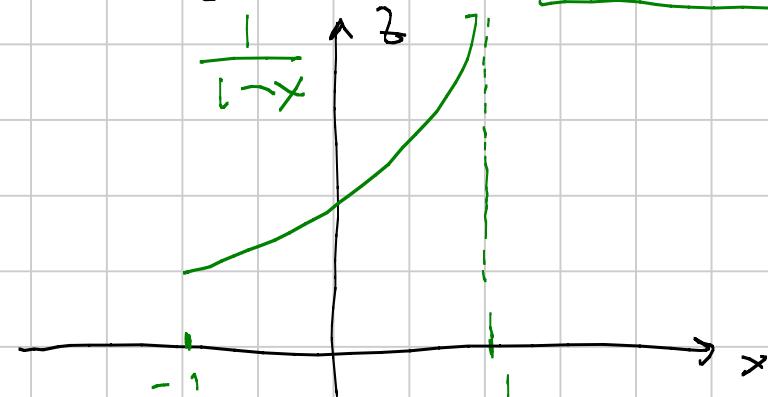
$$\inf = \frac{1}{2}.$$

Il max vorrebbe essere sul lato di dx, sul quale f non è nemmeno definita (sul quadrato chiuso non avrei nemmeno potuto considerare il problema).

Ma man mano che ci si avvicina al lato di dx  $x \rightarrow 1^+$ , quindi  $f \rightarrow +\infty$ .

Conseguenza:

$$\sup = +\infty$$

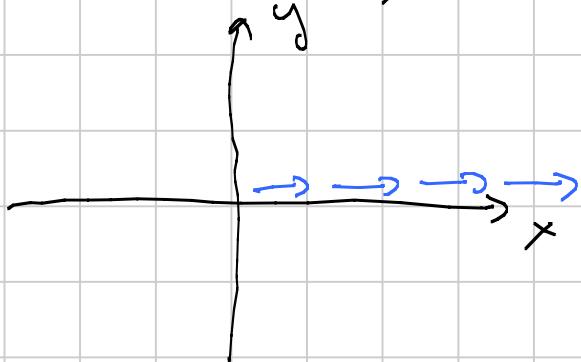


Esempio 1

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$\min = \inf = 0$  p.t.o min:  $(0, 0)$

$\sup = +\infty$ , max N.E.



un ovvio che fa questo percorso verde  
 $f(0, x) = x^2$ , che tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$

$y=0, x$  enorme

Esempio 2

$$f(x, y) = x^2 - y^4$$

$$A = \mathbb{R}^2$$

$\sup = +\infty$  ( $y = 0, x$  enorme)

$\inf = -\infty$  ( $x = 0, y$  enorme)

max N.E.  
min N.E.

Esempio 3

$$f(x, y) = xy$$

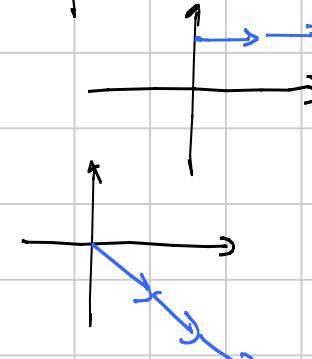
$$A = \mathbb{R}^2$$

$\sup = +\infty$  ( $y = x$  e  $x$  enorme)



$\max$ : N.E. ( $y = 3$  e  $x$  enorme)

$\inf = -\infty$  ( $y = -x$  e  $x$  enorme)



$\min$ : N.E. ( $y = 3$  e  $x$  enorm. neg.)

Esempio 4

$$f(x, y) = x^3 + y^3$$

$$A = \mathbb{R}^2$$

$\sup = +\infty$  ( $y = 0$ ,  $x$  enorme)  $\max$  N.E.

$\inf = -\infty$  ( $y = \infty$ ,  $x$  enorm. neg.)

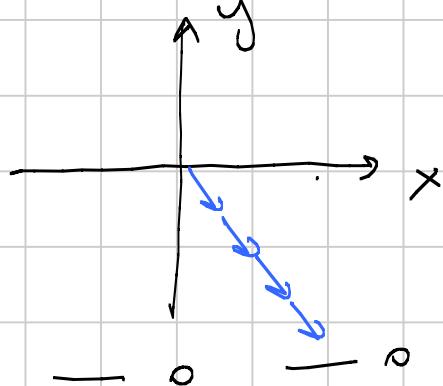
Esempio 5

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$$

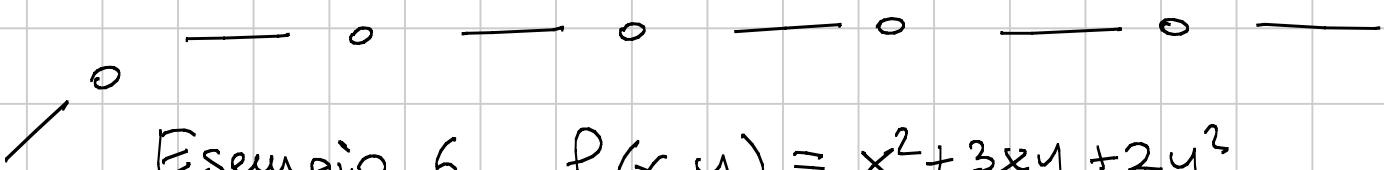
$$A = \mathbb{R}^2$$

$\sup = +\infty$  ( $y=0$ ,  $x$  enorme)

$\inf = -\infty$  ( $y = -x \rightsquigarrow$  diventa  $f(x, -x) = x^2 - 3x^2 + x^2 = -x^2$ )



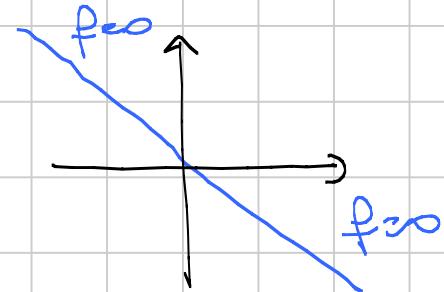
(con  $x$  enorme  $\rightarrow -\infty$ )



Esempio 6  $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$

$\sup = +\infty$  ---.

$$y = -x \quad f(x, -x) = x^2 - 3x^2 + 2x^2 = 0$$



$$x^2 + 3xy + 2y^2 = \left[ x^2 + 2x \cdot \frac{3y}{2} + \left( \frac{3y}{2} \right)^2 \right] - \left( \frac{3y}{2} \right)^2 + 2y^2$$

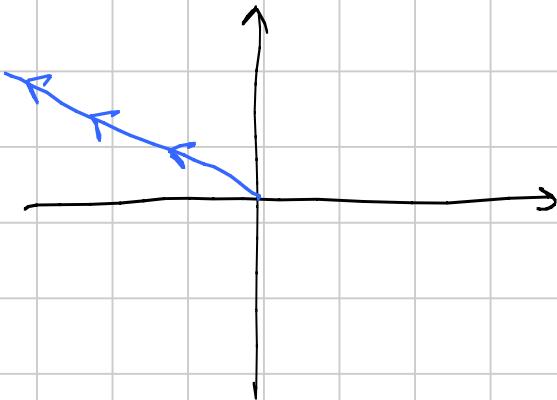
$\uparrow \quad \uparrow$

$$= \left( x + \frac{3y}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} y^2$$

COMPLETAMENTO  
DEI QUADRATI

Ponendo  $x = -\frac{3y}{2}$ , e  $y$  enorme

$$f\left(-\frac{3y}{2}, y\right) = -\frac{1}{4} y^2 \rightarrow -\infty$$



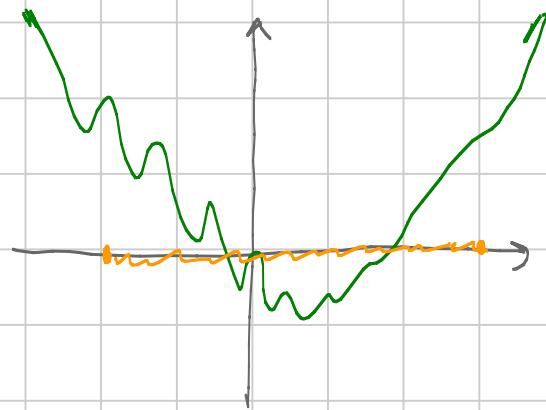
$$x = -\frac{3y}{2} \quad y = -\frac{2}{3}x$$

$$\inf f = -\infty$$

Esempio 7  $f(x, y) = x^4 + y^4 + xy$   $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$  Max N.E., ( $y=0, x$  enorme)

In 1 variabile



$$f(x) = x^4 - 17x^2 + \sin x^3 \quad A = \mathbb{R}$$

$\sup = +\infty$  ( $x$  enorme)

Weierstrass esteso ;  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste  $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$

## ANALISI II. CIV

" $\lim f(x,y) = +\infty$  tutto intorno"

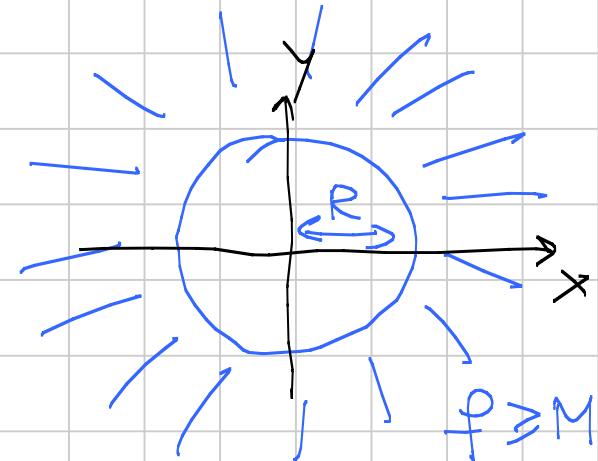
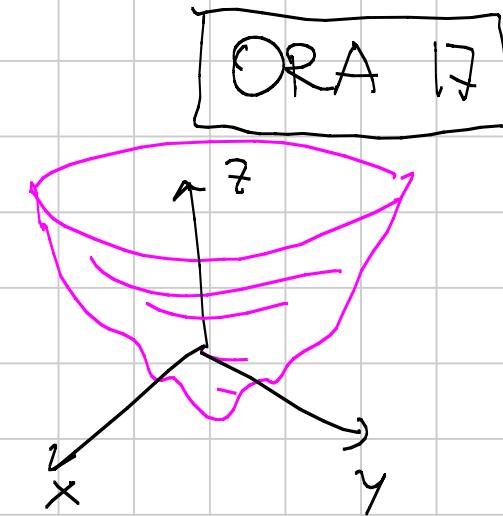
"La funzione diventa enorme man mano che ci si allontana dall'origine"

Def. Si dice che

$$\lim f(x,y) = +\infty$$

$$x^2+y^2 \rightarrow +\infty$$

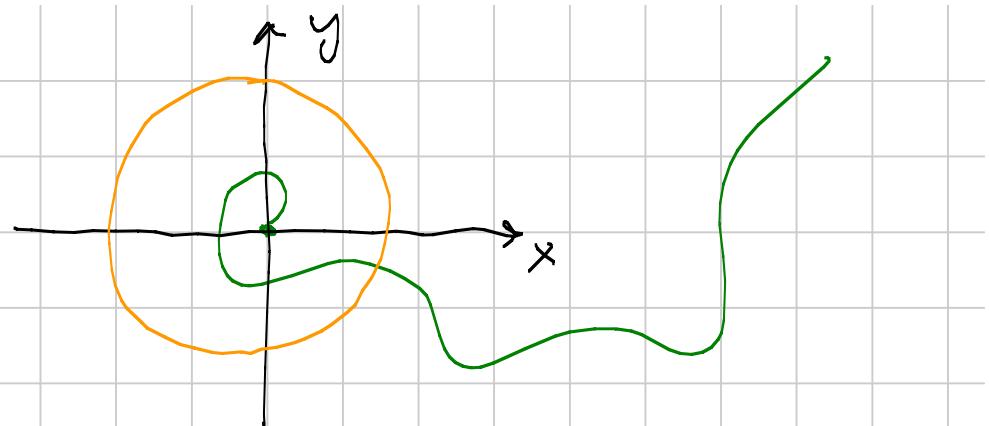
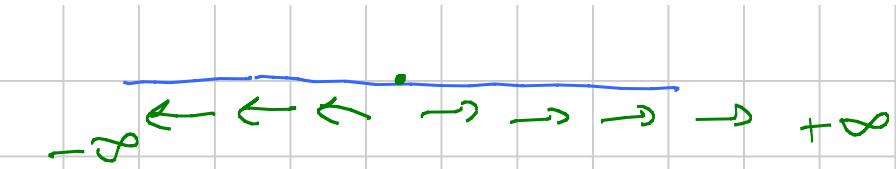
allontanarsi  
dall'origine



se  $\forall M \in \mathbb{R}$  (anche enorme)  $\exists R > 0$  t.c.

$$f(x,y) \geq M$$

$$\forall (x,y) : \|(x,y)\| \geq R$$



Analogamente:

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = -\infty$$

$\forall M \in \mathbb{R}$  (anche estrar. neg.)  $\exists R > 0$  b.c.

$f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y)$  fuori da  $B_R(0, 0)$

o ancora

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = l \in \mathbb{R}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$  b.c.  $|f(x, y) - l| \leq \varepsilon \quad \forall (x, y)$  fuori da  $B_R(0, 0)$

WEIERSTRASS ESTESO

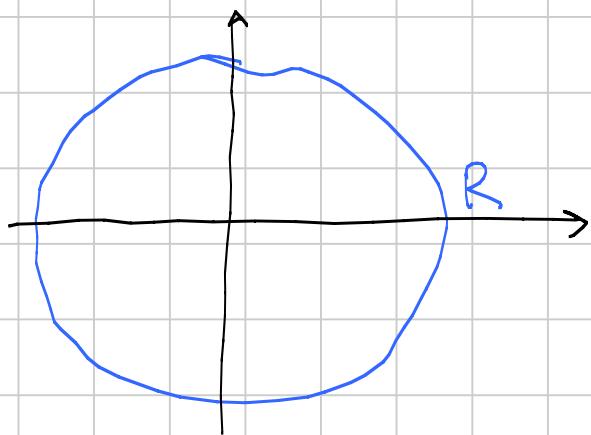
Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua e b.c.

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

Allora esiste per forza  $\min \{f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Dim. il minimo, se esiste, sarà  $\leq f(0, 0)$ . Per definiz. di limite,

\*  $f(x, y) \geq f(0, 0) + 1$  fuori da un cerchio di raggio opportuno



Considero il minimo di  $f(x, y)$  in  $B_R(0, 0)$  (esiste per w.). Dico che è il min non solo dentro  $B_R$ , ma su tutto  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $(x_0, y_0)$  tale punto.

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_R(0, 0)$$

Inoltre

$$f(x_0, y_0) \leq f(0,0) \leq f(x,y) - 1 < f(x,y)$$

↑  
dalla \* per ogni  $(x,y)$   
fuori da  $B_R(0)$

$$\text{---} 0 \text{ ---} 0 \text{ ---}$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + xy.$$

Se sapessimo che

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

per W. esteso sapremo che  $\exists$  min su tutto  $\mathbb{R}^2$ . Ma allora si troverebbe in un p.t.o. stazionario e quindi si sa trovare,

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x^3 + y = 0 \\ 4y^3 + x = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -4x^3 \\ 4(-4x^3)^3 + x = 0 \end{array} \right. \quad \text{sost. nella 2^a}$$

$$-256x^8 + x = 0; \quad x(-256x^8 + 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$x^8 = \frac{1}{256} = \frac{1}{2^8}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

RICAVO  
DA  
1^A EQ.

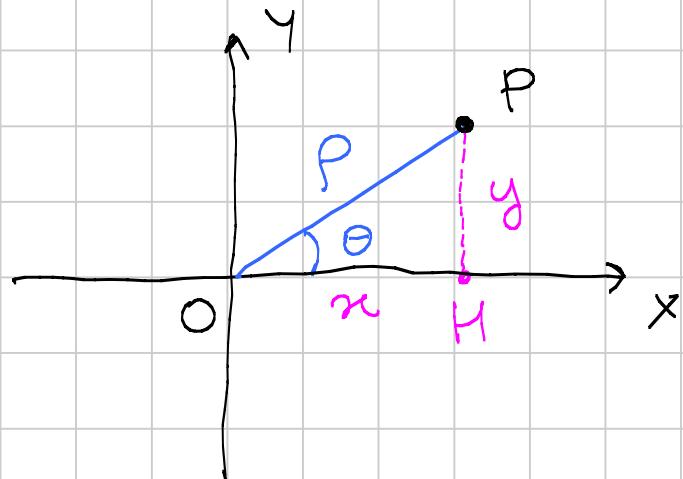
$$y = \pm \frac{1}{2}$$

PUNTI STA Z. :

$$(0,0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Sostituendo si vede quale / quali sono i p.ti di min.

## COORDINATE POLARI NEL PIANO



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$[\rho \geq 0]$$

$\theta$  = angolo definito a meno di multipli di  $2\pi$

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

Fare un liceo  
 $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$  equivale a fare un liceo per  $\rho \rightarrow +\infty$

$$\text{Se ho } f(x, y) = x^2 + y^2 + 6 \sin(xy) + 5x$$

Cosa diventa in coord. polari?

$$f(\rho, \theta) = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta + 6 \sin(\rho^2 \sin \theta \cos \theta) + 5 \rho \cos \theta$$

↑  
 sost.  
 $\rho^2 + 6 \sin(\ ) + 5 \rho \cos \theta$

Voglio dimostrare che  $f(\rho, \theta) \rightarrow +\infty$  quando  $\rho \rightarrow +\infty$ ,  
 indipendentemente da  $\theta$ .

Per farlo rigorosamente, usiamo il confronto

$$\boxed{\rho^2 + 6 \sin(\ ) + 5 \rho \cos \theta} \geq \boxed{\rho^2 - 6 - 5\rho}$$

per  $\rho \rightarrow +\infty$   
 +∞ per confronto

Esempio 8

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 7y + 522x$$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

Passo in coord. polari:

$$\begin{aligned} f(\rho, \theta) &= \rho^2 \cos^2 \theta + 2\rho^2 \sin^2 \theta - 7\rho \sin \theta + 522 \rho \cos \theta \\ &= \rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta - 7\rho \sin \theta + 522 \rho \cos \theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta - 7\rho \sin \theta + 522 \rho \cos \theta} \geq \boxed{\rho^2 - 7\rho - 522\rho}$$

$\uparrow$   
 $+\infty$  per confronto

Esempio 7

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + xy$$

$$f(\rho, \theta) = \rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta + \rho^2 \cos \theta \sin \theta$$

$C > 0$

$$\boxed{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + \rho^2 \cos \theta \sin \theta} \geq \boxed{C \rho^4 - \rho^2}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$

$+ \infty$  per confronto                                     $+ \infty$       per colpa  
di  $C \rho^4$

Perché  $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq C$  con  $C > 0$

Premetto la funzione  $g(\theta) = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta$ . Questa funzione, quando  $\theta$  varia da  $0$  a  $2\pi$ , assume da qualche parte il suo minimo (per W.). Questo minimo non può essere  $0$ , perché  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  non possono essere contemporaneamente nulli.

Pertanto il min. sarà un certo  $C > 0$        $g(\theta) \geq C$

$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta - \rho^2$$

Se  $\cos \theta \neq 0$ , allora

$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta - \rho^2 \geq [\rho^4 \cos^4 \theta - \rho^2] \rightarrow +\infty$$

Se  $\cos \theta = 0$ , allora  $\sin^4 \theta = 1$

$$\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta - \rho^2 \geq [\rho^4 - \rho^2] \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$  in OGNI CASO  $\rightarrow +\infty$

NOOOOOO !!!

## ANALISI II

ORA 18

Esempio 9  $f(x,y) = x^4 + y^2 - 3xy^2$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$$

$$f(\rho, \theta) = \rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 3\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

Quando  $\cos \theta \neq 0$ , comanda  $\rho^4 \cos^4 \theta$ , dunque  $f \rightarrow +\infty$

Quando  $\cos \theta = 0$ , resta solo  $\rho^2 \sin^2 \theta$ , poiché  $\sin^2 \theta = 1$ ,  
è come dire che resta solo  $\rho^2$ , dunque  $f \rightarrow +\infty$  anche  
in questo caso

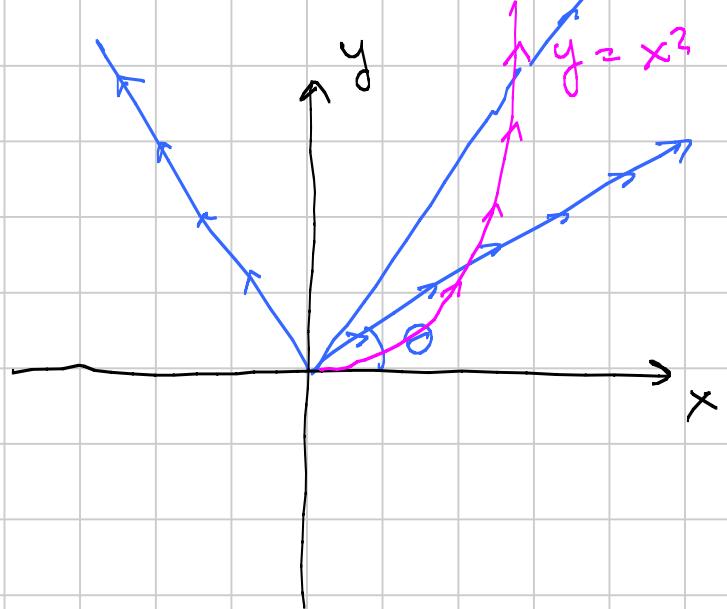
Quindi  $f \rightarrow +\infty$

Se così fosse, il minimo esisterebbe. Dico che  $\inf f = -\infty$   
(su tutto  $\mathbb{R}^2$ )

$$f(x, y) = x^4 + y^2 - 3xy^2$$

Metto  $y = x^2$        $f(x, x^2) = x^4 + x^4 - 3x^5 = 2x^4 - 3x^5$

Prendendo  $x$  enorme ho che  $f \rightarrow -\infty$



$\theta = \text{costante}, r \rightarrow +\infty$

Comunque scelga la retta  $f \rightarrow +\infty$

Lungo  $y = x^2$  la funzione

$f \rightarrow -\infty$

Esempio 10  $f(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$

$$f(\rho, \theta) = \rho \cos \theta e^{-\rho^2}$$

$$\begin{aligned} -\rho e^{-\rho^2} &\leq \rho \cos \theta e^{-\rho^2} \\ 0 & \\ -\rho e^{-\rho^2} &\leq \rho e^{-\rho^2} \\ 0 & \end{aligned}$$

$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = 0$ . Inoltre esistono p.ti in cui  $f > 0$  e punti in cui  $f < 0$ .

Questo basta per concludere che esistono max / min.

Dato che esistono, si troveranno in p.ti stazionari.

In 1 variabile



TORNIAMO ALLE FORME QUADRATICHE

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Criterio basato sugli autovalori

- \* Tutti autoval.  $> 0 \Rightarrow$  def. pos.
- $\geq 0 \Rightarrow$  semi .. ..
- $< 0 \Rightarrow$  def. neg.
- $\leq 0 \Rightarrow$  semi .. ..

NEL CASO PARTICOLARE  $2 \times 2$  si può decidere il segno degli autov. senza calcolarli?

Siamo  $\lambda, \mu$  gli autovalori della matrice A

$$\lambda \cdot \mu = \det A$$

$$\lambda + \mu = \text{Tr } A = \text{somma el. sulla diagonale}$$

Conoscendo  $\text{Tr } A$  e  $\det A$ , è facile risalire al segno degli autov.

$\det A = 0 \Rightarrow$  almeno 1 autov è 0 e l'altro =  $\text{Tr } A$

$\det A < 0 \Rightarrow$  autov. 1+ e 1-

$\nearrow +, +$  (in questo caso  $\text{Tr } A > 0$ )

$\det A > 0 \Rightarrow$   $\searrow -, -$  (in questo caso  $\text{Tr } A < 0$ )

Esempio 1

$$q(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\det A = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0 \quad + +$$

$$\operatorname{Tr} A = 2 > 0 \Rightarrow + +$$

$\Rightarrow$  forma definita positiva

Esempio 2

$$q(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 - \frac{9}{4} < 0 \Rightarrow + -$$

La forma non è def. pos. / neg.

Esempio 3

$$q(x,y) = x^2 + xy$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow + -$$

non definibile

— o — o — o

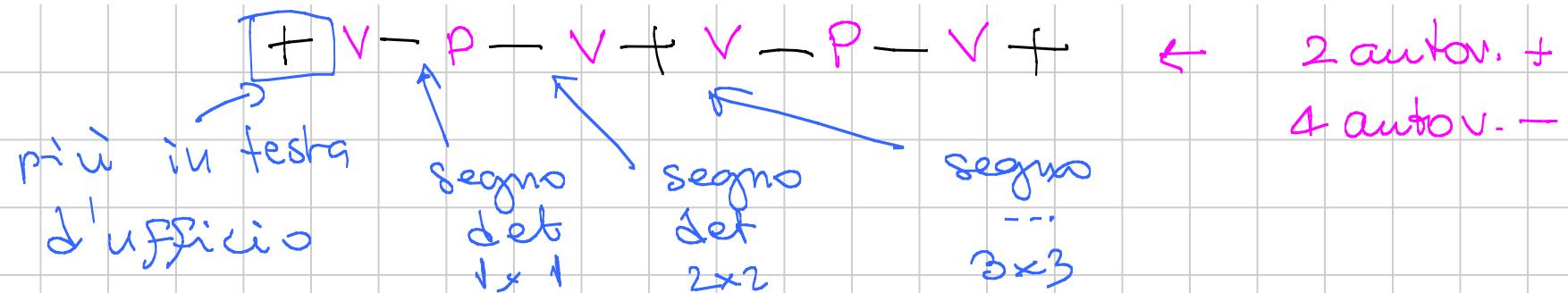
METODO DEI MINORI ORLATI = metodo per sapere segno auto. senza calcolarli,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si calcolano i determinanti di tutti i minori così costruiti  
E SI SPERA che vengano  $\neq 0$ .

Si scrive in successione i segni + segnati dai segni dei det trovati



Allora la matrice originaria ha tanti autov. + quante sono le permanenze di segno , e tanti autov. - quante sono le variazioni

Come si ricorda ? Supponiamo che la matrice sia diagonale.

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ \hline & & \lambda_3 & \\ \hline & 0 & & \lambda_4 \\ & & & \ddots \end{array} \right)$$

UFFICIO

+

segno	segno
$\lambda_1$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2$

ogni volta che introduco un nuovo autov ho una var. o perm. a seconda del suo segno.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det  $1 \times 1 = 1$

Det  $2 \times 2 = 1 - 4 = -3$

Det  $3 \times 3 = -1$

Segni:  $+P +V -P -$

2 autov. +  
1 autov.  $\rightarrow$

E se un det viene = 0?

SI PUÒ CAMBIARE DIREZIONE

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$



NO! bisogna andare lungo  
la diagonale

Si può anche partire dal centro (sempre sulla diagonale)

