ANALISI II CIVILI (NUCL.)

Titolo nota

ORA 14

18/10/2006

* Formula di Taylor in + variabili

* Forme (o matrici) definite positive / negative

— o — o —

TAYLOR IN 1 VARIABILE centro $x_0 = 0$

Data una funzione f ed un intero positivo n, esiste un polinomio $\boxed{P_n(x)}$ tale che

DI GRADO $\leq n$

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{o(x^n)}$$

resto che tende a zero + velocemente di x^n

RESTO DI PEANO

Inoltre

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Se conosco tutte le derivate di f (fino alla n-esima) nel p.to $x=0$, posso determinare $P_n(x)$

RESTO DI LAGRANGE

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}$$

RESTO DI LAGRANGE

Dato x, esiste un p.to ξ compreso tra 0 e x per cui vale la formula di sopra

In 2 variabili centro $(x_0, y_0) = (0,0)$

Data $f(x,y)$ ed n esiste un unico polinomio $\boxed{P_n(x,y)}$ tale che

DI GRADO $\leq n$

$$f(x,y) = P_n(x,y) + \boxed{o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^n\right)}$$

RESTO DI PEANO

polinomio di 2 variabili

Formula per $P_n(x,y)$

$$P_n(x,y) = f(0,0) +$$

$$+ \left[f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y\right] \cdot \frac{1}{1!} +$$

$$+\frac{1}{2!}\Big[\boxed{1} f_{xx}(0,0)\,x^2 + \underbrace{\boxed{2} f_{xy}(0,0)\,xy}_{\text{è come se ci fossero sia } xy \text{ sia } yx} + \boxed{1} f_{yy}(0,0)\,y^2\Big]$$

$$+\frac{1}{3!}\Big[\boxed{1} f_{xxx}(0,0)\,x^3 + \boxed{3} f_{xxy}(0,0)\,x^2y + \boxed{3} f_{xyy}(0,0)\,xy^2 + \boxed{1} f_{yyy}(0,0)\,y^3\Big]$$

CORRETTO DOPO

$$+\frac{1}{4!}\Big[\boxed{1} f_{xxxx}(\;)\,x^4 + \boxed{4} f_{xxxy}(\;)\,x^3y + \boxed{6} f_{xxyy}(\;)\,x^2y^2 + \dots\Big]$$

1 1

1 2 1

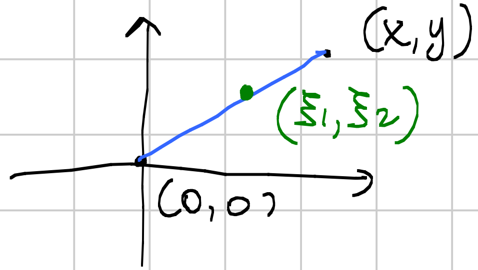
1 3 3 1

1 4 6 4 1

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

RESTO DI LAGRANGE: il resto è come se fosse il termine successivo, solo che le derivate non sono calcolate in $(0,0)$, ma in punto (ξ_1, ξ_2) appartenente al segmento che congiunge (x,y) con $(0,0)$



Operativamente, come si calcola?

Ricordando i polinomi di taylor in 1 variabile!

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

$\sinh t$ e $\cosh t$ sono come $\sin t$ e $\cos t$, solo con tutti +

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \dots$$

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots$$

Esempi ① $f(xy) = e^{xy}$ $\qquad P_3(x,y)$

$$e^{xy} = \boxed{1 + xy} + o\left((x^2+y^2)^{3/2}\right)$$

il termine successivo $\frac{x^2y^2}{2}$ è di grado 4

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}$$

Calcolare $\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}(0,0) = 0$

È il coeff. che compare in $P_5(x,y)$ davanti a x^3y^2, ma questo termine NON c'è nel polinomio.

(2) $f(x,y) = x\sin(x+y)$ $\qquad P_3(x,y)$

$$\sin(x+y) = (x+y) - \frac{(x+y)^3}{6} + \dots$$

INUTILE

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \dots$$

NON ENTRA NEL $P_3(x,y)$

Moltiplico per x:

$$x\sin(x+y) = x(x+y) - \boxed{x\,\frac{(x+y)^3}{6} + \dots}$$

$$P_3(x,y) = x^2 + xy$$

: i termini successivi hanno grado ≥ 4

Cosa si può dire delle derivate terze di f in $(0,0)$?

Sono tutte $=0$.

③

$\sin(xy)\cos(x+y)$ $\qquad P_4(x,y)$

$$\sin(xy) = xy \boxed{- \frac{x^3y^3}{6} + \dots}$$

$$\cos(x+y) = 1 - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^4}{24} + \dots$$

$4!$

$$\sin(xy)\cos(x+y) = \underbrace{\boxed{xy - \frac{xy(x+y)^2}{2}}}_{P_4(x,y)}$$

Tutto il resto è di grado > 4

ANALISI II CIV $\boxed{\text{ORA 15}}$

FORME QUADRATICHE E MATRICI

||

polinomio in n variabili con tutti termini di grado 2

<u>Esempi</u> $\boxed{n=2}$ $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

$\boxed{n=3}$ $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$

Le forme quadratiche intervengono come termini di grado 2 nei pol. di Taylor

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{SIMMETRICA}$$

$$q(x,y) = (x,y)\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$(x,y)\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} =$$

$$= x(ax+by) + y(bx+cy)$$

$$= ax^2 + bxy + byx + cy^2$$

Ad ogni forma corrisponde una matrice SIMMETRICA

in n VARIABILI $\qquad$ $n \times n$

e VICEVERSA

$$q(x,y,z) = 3x^2 + 6xy + z^2 - 3yz$$

metà di 6

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{3} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow q(x,y,z) = y^2 + 2z^2 + 6xy + 10xz$$

— o — o —

$$f_{xx}(0,0)\, x^2 + 2 f_{xy}(0,0)\, xy + f_{yy}(0,0)\, y^2 = q(x,y)$$

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$$

MATRICE HESSIANA DI f in $(0,0)$ $Hf(0,0)$

Def. Una forma quadratica (o una matrice simm.) si dice

DEFINITA POSITIVA se $q(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$

" NEGATIVA se $q(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$

SEMIDEFINITA POSITIVA se $q(x,y) \geq 0$ per ogni (x,y)

" NEGATIVA se $q(x,y) \leq 0$ "

Problema: data una forma, stabilire se ricade in una di queste 4 categorie

Oss. Una forma non è obbligata a cadere in una delle 4 categorie

$q(x,y) = x^2 - y^2$ positiva in $(1,0)$
negativa in $(0,1)$

Si dice in questo caso che è NON DEFINITA

— o — o —

METODI
- Completamento dei quadrati ①
- Autovalori ②
- Minori ORLATI ③

Metodo ② Calcolo gli autovalori della matrice.
Essendo la matrice simmetrica, vengono per forza numeri REALI

La forma risulta

* DEF. POS. se tutti gli autov. sono > 0
* SEMI " " " ≥ 0

DEF NEG < 0

SEMI " " " ≤ 0

NON DEFINITA se ci sono autov. pos. e autov. neg.

Esempio $\quad q(x,y) = x^2 - y^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Gli autovalori sono gli el. della diagonale (è vero perchè la matrice è DIAGONALE), dunque uno pos. e uno neg $\Rightarrow$ non definita.

— o — o —

$$q(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2y^2$$

$$= (x+y)^2 + 2y^2$$

Essendo somma di 2 $\square$, sarà sempre ≥ 0. Quando si annulla?

Se e solo se $x+y=0$ e $y=0$, cioè per $(x,y)=(0,0)$

Quindi è definita positiva.

$$q(x,y) = x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x\cdot\frac{y}{2} + y^2$$

DOPPIO PRODOTTO

$$= x^2 + 2x\cdot\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2$$

$$= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

$\square + \square \Rightarrow$ definita positiva

$$q(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 = x^2 + 2x\cdot\frac{3y}{2} + y^2$$

$$\underline{x^2} + \underline{2xy} + xy \underline{+y^2}$$

$$(x+y)^2 + \boxed{xy}$$

$\downarrow$

No $\square$

$$= x^2 + 2x\cdot\frac{3y}{2} + \frac{9y^2}{4} - \frac{5}{4}y^3$$

$$= \left(x + \frac{3y}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}y^2$$

$$= \square - \square$$

NON DEFINITA

Se voglio $q(x,y)>0$ basta prendere $y=0$, x qualunque

$q(x,y)<0$ basta prendere $x+\frac{3y}{2}=0$

e y qualunque

Esempio di $q(x,y)$ semidef. pos., ma non def. pos.

$$q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$$
$$= (x-y)^3$$

$q(x,y) \geq 0$ per ogni (x,y)

Quando $q(x,y) = 0 \iff x = y$ dunque si annulla anche per $(x,y) \neq (0,0)$