

# ANALISI II CIV NUCL.

ORA 3

Derivate parz, gradiente, p.ti stazionari  $\nabla f = 0$   
  
**VETTORI**

• Esistenza (teo. WEIERSTRASS)

• Ricerca p.ti max/min

1) STAZ. INTERNI

$$f'(x) = 0$$

2) SING. INT.

$f'(x)$  NON ESISTE

3) BORDO

$$x=a$$

$$x=b$$

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

cerca max/min

In 2 variabili  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$   $A \subseteq \mathbb{R}^2$

Not.  
Vett.

$$\max \{ f(x) : x \in A \} \quad \text{valori max/min}$$

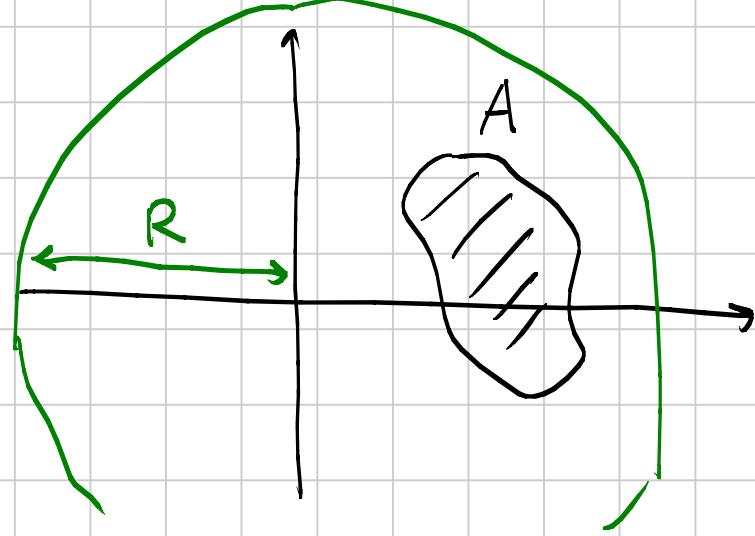
$$\min \{ f(x) : x \in A \} \quad \text{"delle z"}$$

Def. Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice limitato se  $\exists R > 0$  t.c.

$\uparrow$  RAGGIO

$$A \subseteq B_R(0,0)$$

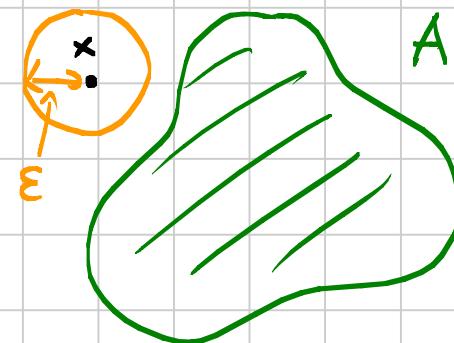
$R$  cerchio con raggio  $R$   
e centro in  $(0,0)$



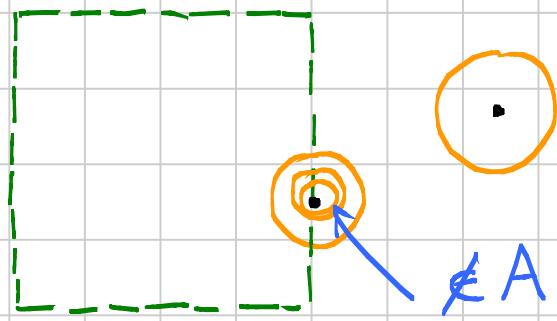
Def. Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice chiuso "se contiene tutto il suo bordo".

+ rigorosamente :  $A$  è chiuso se preso un qualunque p.t.  $x \notin A \exists \varepsilon > 0$  tale che

$$B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$$



Esempio 1 Sia  $A$  un quadrato senza il bordo



ogni cerchio con centro  
in  $x$  interseca  $A$   
 $\Rightarrow A$  NO CHIUSO

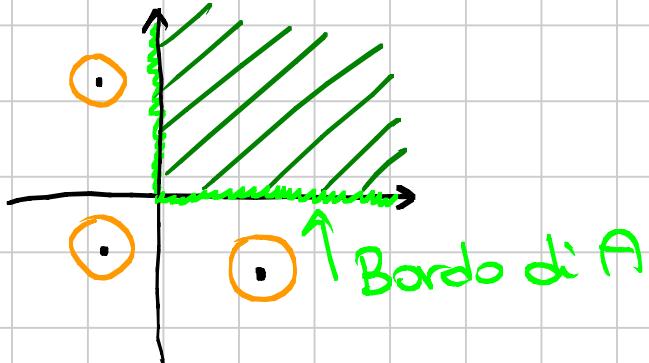
### Esempio 2

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

I quadrante

A non è limitato

A è chiuso



### Esempio 3

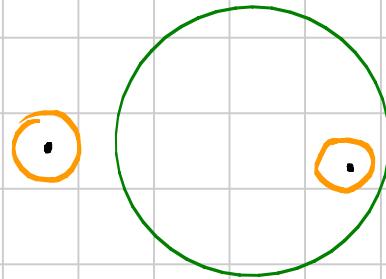
Ogni poligono e ogni cerchio sono limitati  
Sono chiusi ( $\Rightarrow$ ) contengono il bordo

### Esempio 4

A = circonferenza (solo contorno).

LIMITATO : SI

CHIUSO : SI



Def. Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice COMPATTO se è CHIUSO + LIMITATO.

TEO. WEIERSTRASS. Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo che

(i) A sia COMPATTO

(ii) f continua

Allora esistono max e min di f in A.

— o — o —

**ACHTUNG !!!** Se A non è compatto, max e min potrebbero esistere ugualmente, ma è + complicato verificarlo,

Una volta che max e min esistono, si cercano i p.ti di max / min in queste 3 categorie

① PUNTI STAZIONARI INTERNI  $\times$  interni ad A (non sul bordo)  
dove  $\nabla f(x) = 0$

② PUNTI SINGOLARI INTERNI  $\times$  interni ad A  
dove  $\nabla f(x)$  NON ESISTE

③ PUNTI SUL BORDO DI A  $\leftarrow$  sono infiniti punti

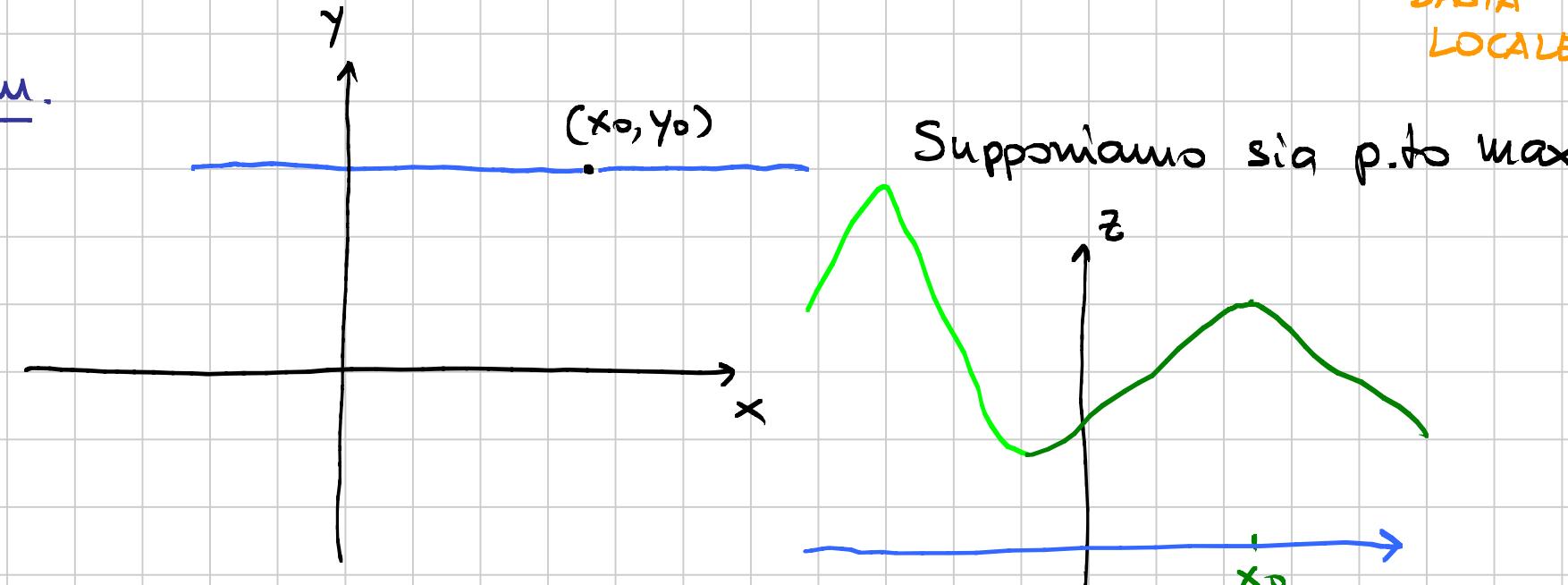
## Teorema

Se  $x_0$  è interno ad  $A$  ed è un p.t.o di max(min)

allora  $\nabla f(x_0) = 0$ , cioè  $f_x = 0$ ,  $f_y = 0$

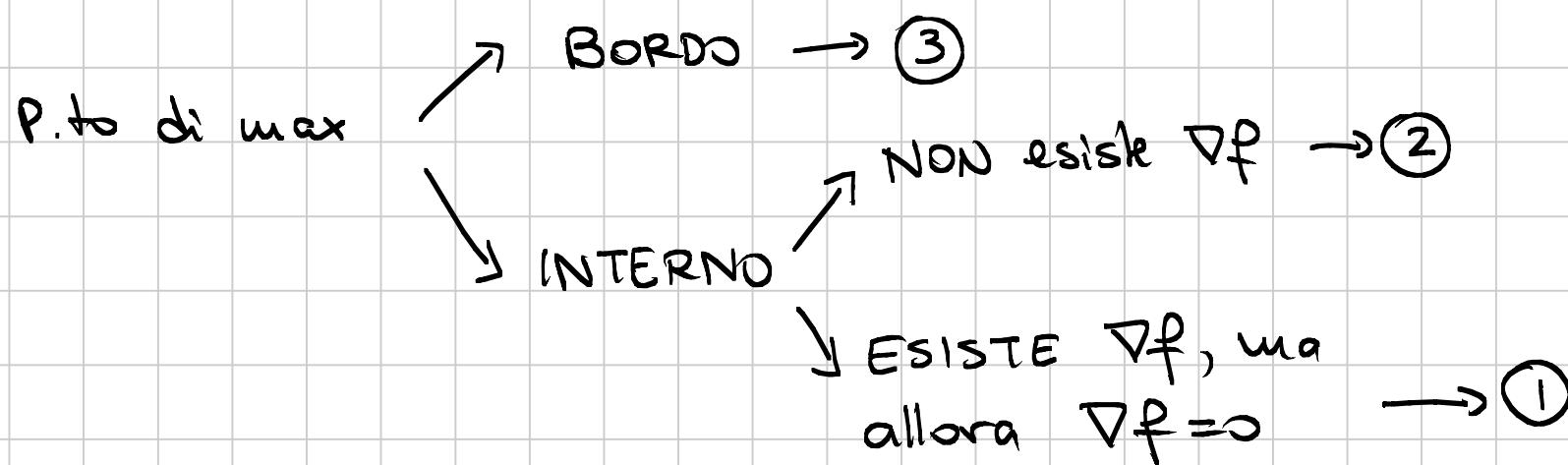
BASTA  
LOCALE

Dim.



$f_x(x_0, y_0) = \text{derivata curva verde}$   
nel p.t.o  $x_0 = 0$  per tes. uno dimensionale

IDEM per  $f_y(x_0, y_0)$ .



Notazioni

$x_0$  si dice p.t. di max ASSOLUTO GLOBALE

se  $f(x) \leq f(x_0)$   $\forall x \in A$ .

in  $A$

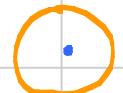
$x_0$  batte tutti i p.t. di  $A$

$x_0$  si dice p.t. di max RELATIVO se  $f(x) \leq f(x_0)$

LOCALE

$\forall x \in B_r(x_0)$   $r = \text{raggio opportuno}$

$x_0$  batte un suo intorno



Oss.  $x_0$  p.t. max GLOBALE  $\Rightarrow x_0$  p.t. max LOCALE

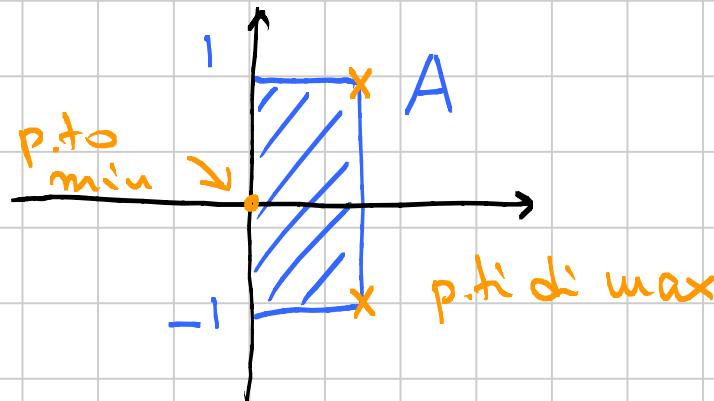
## ANALISI II CIV

ORA 10

Esempio 1

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$A = [0, 1] \times [-1, 1]$$

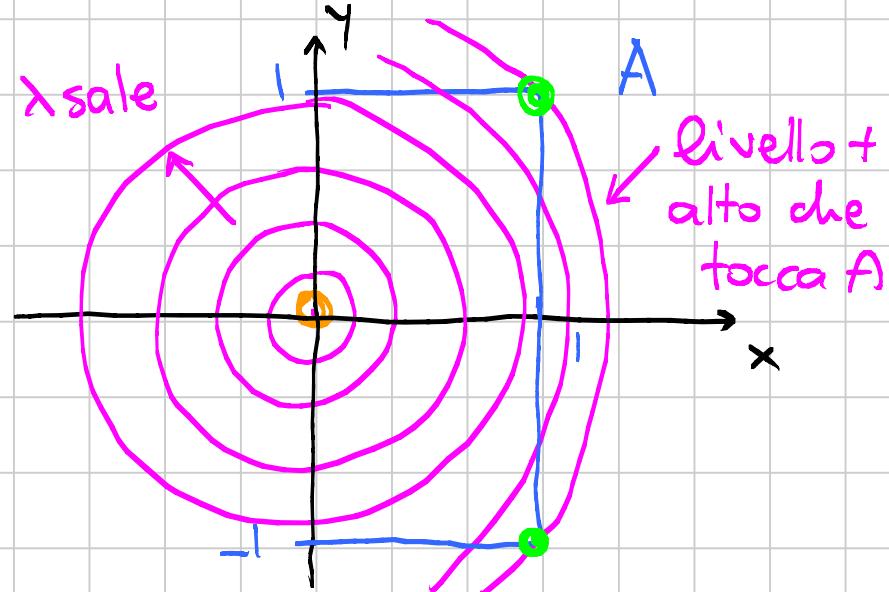


Max = 2 p.ti di max:  $(1, 1), (1, -1)$

min = 0 p.ti d'min:  $(0, 0)$

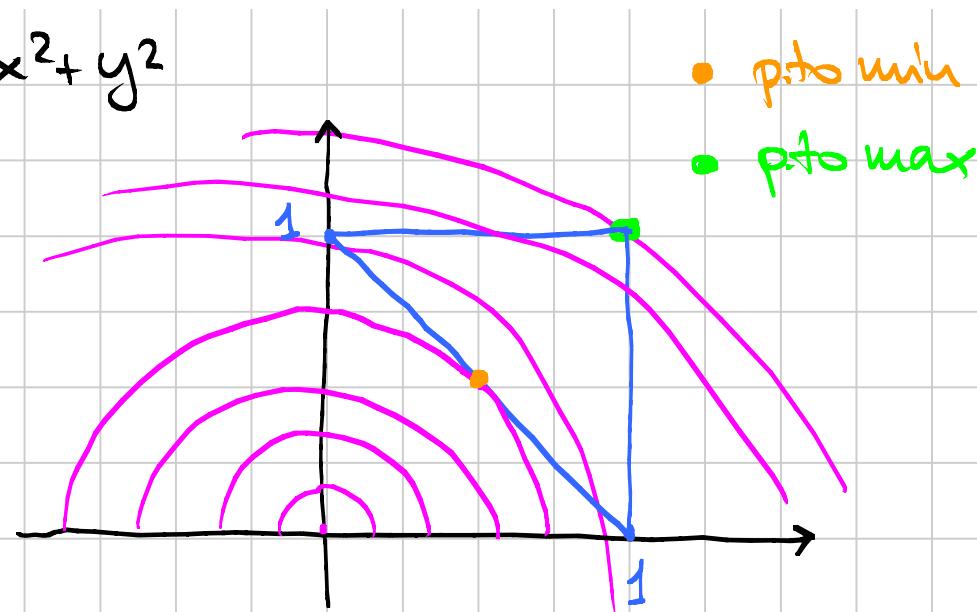
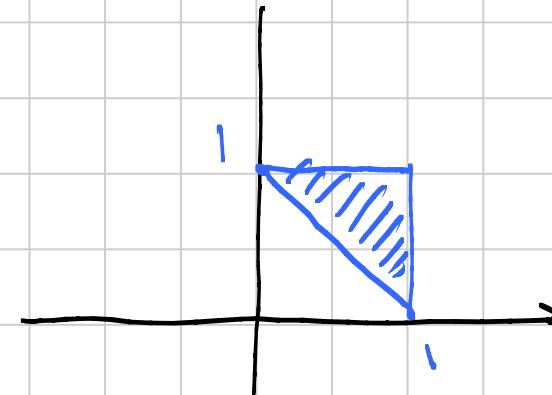
Metodo delle linee di livello

minimo  $\rightsquigarrow$  linea di livello + basso che tocca A



Esempio 2

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$



Risposta:

$$\max = 2 \quad \text{p.t.o di max } (1,1)$$

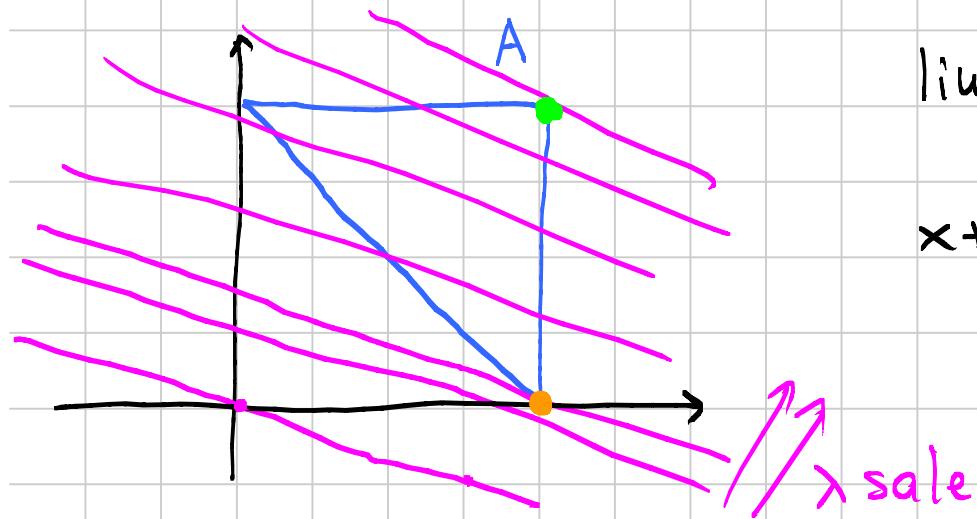
$$\min = \frac{1}{2} \quad \text{p.t.o di min } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

### Esempio 3

A come in es. 2.

$$f(x,y) = x + 3y$$



linee di livello  $f(x,y) = \lambda$

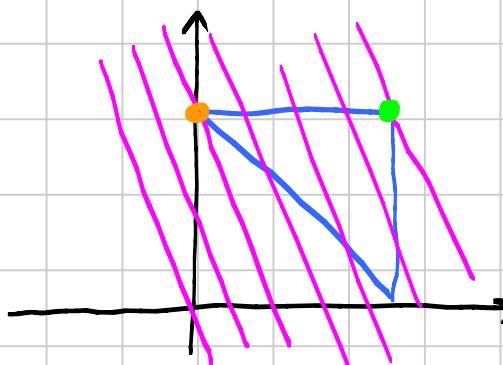
$x + 3y = \lambda$  famiglia di rette //  
con coeff. ang.  $-\frac{1}{3}$

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{\lambda}{3}$$

Risposta : max : 4  
min : 1

p.t.o di max : (1,1)  
p.t.o di min : (1,0)

### Es. 4 $f(x,y) = 3x + y$



Es. 5 : cosa accade  
con  $f(x,y) = x + y$

Derivate successive per funzioni di + variabili

$$f(x,y) = x^3 + 5x^2y + y^4$$

$$f_x = 3x^2 + 10xy$$



$$f_{xx} = 6x + 10y$$



$$f_{xy} = 10x$$



$$f_{yx} = 10x$$



$$f_y = 5x^2 + 4y^3$$



$$f_{yy} = 12y^2$$



Una funzione di 2 variabili ha 2 der. prime, 4 der. sec.,  
8 der. terze, ... ,  $2^k$  derivate k-esime

Una funzione di n variabili ha  $n^k$  der. k-esime

SEM  
BRA

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

Esempio  $f(x, y) = \sin(x^2 y)$

$$f_x = 2xy \cos(x^2 y)$$

$$f_y = x^2 \cos(x^2 y)$$

$$f_{xx} = 2y \cos(x^2 y) - 4x^2 y^2 \sin(x^2 y)$$

$$f_{xy} = 2x \cos(x^2 y) - 2x^3 y \sin(x^2 y)$$

$$f_{yx} = 2x \cos(x^2 y) - 2x^3 y \sin(x^2 y)$$

$$f_{yy} = -x^4 \sin(x^2 y)$$

UGUALI

## Teorema inversione dell'ordine di derivazione

Sotto ipotesi decenti (ad esempio se  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  esistono e sono continue) si ha che  $f_{xy} = f_{yx}$

Conseguenza: in una derivata 2<sup>e</sup>-esima di una funz. di 2 variabili conta solo quante derivo risp. a x e quante rispetto a y

$$f_{x \square y \times y} = f_{x \times y y}$$

INVECE

Deriv. 2<sup>e</sup> in 2 var.

$$f_{xx} \quad f_{xy} \quad f_{yy} \quad 3$$

3<sup>e</sup> in "

$$f_{xxx} \quad f_{xxy} \quad f_{xyy} \quad f_{yyy} \quad 4$$

k-esime  $\rightarrow$  k+1 perché risp. a x posso deriv.

$$0, 1, 2, \dots, k$$

Esercizio

$$f(x,y) = \arctan(x^{3x} \sin x) + \frac{\log(1+ey)}{\sin^5 y^6}$$

$$f_{xy}(8,25) = 0$$

Quando faccio  $f_x$  scompare il perzzo con le  $y$  e rimane un  
mostro con sole  $x$

Ora derivo il mostro risp. a  $y$  e questo scompare.

$$f_{xy}(x,y) = 0$$

IDEM per  $f(x,y) = g(x) + h(y)$ .