

ANALISI II CIN

ORA 6

Titolo nota

10/10/2006

Funzioni di più variabili

$$\begin{aligned} f(x, y) \\ f(x, y, z) \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

In 2 variabili

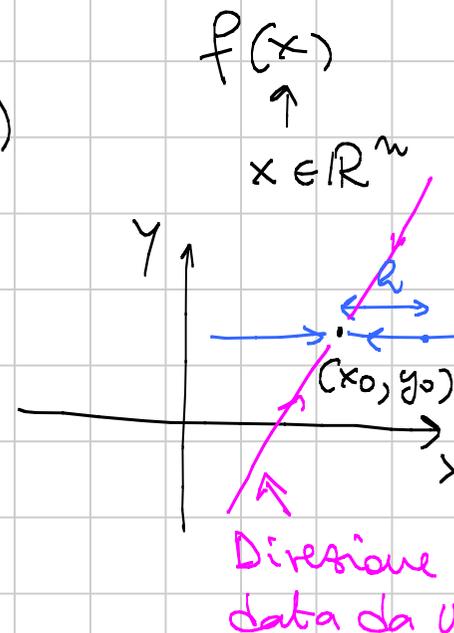
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots$$

Deriv. direzionale

$$v = (\alpha, \beta) \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}$$



Stesse definizioni in notazione vettoriale.

Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ $\|v\| \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

Dirazione

vettore

vettori

numeri

Derivata parziale rispetto a $x_i = i$ -esima componente in \mathbb{R}^n .

Prendo e_1, e_2, \dots, e_n base canonica di \mathbb{R}^n

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

.....

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

↑
posizione i -esima

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

aggiungo h all' i -esima variabile e lascio immutate le altre

PARENTESI DI ANALISI 1

o piccolo e differenziale

Def di o piccolo. Siano $f(x)$ e $g(x)$ 2 funzioni e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si dice che f è o piccolo di g per $x \rightarrow x_0$ se esiste una

funzione $w(x)$ tale che

$$f(x) = g(x) w(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

In tal caso si scrive

$$f = o(g) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Altro modo di dare la definizione (quasi equivalente)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{Se ne poter dividere per } g(x))$$

BRUTALMENTE. Supponiamo che $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$
per $x \rightarrow x_0$

"f tende a zero + velocemente di g"

Esempi: ① $x^2 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

$$x^2 = x \cdot x$$

↑ ↑ ↑
f g w

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\boxed{\sin x - x} = o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$f(x)$ $g(x)$ Tamburini

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$$

Taylor $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \boxed{o(x^4)}$

Qualcosa che nei limiti per $x \rightarrow 0$ batte x^4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{6} + \frac{o(x^4)}{x^2} \right) = 0$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$ $\downarrow 0$

Differenziale. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dico che f è DIFFERENZIABILE in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

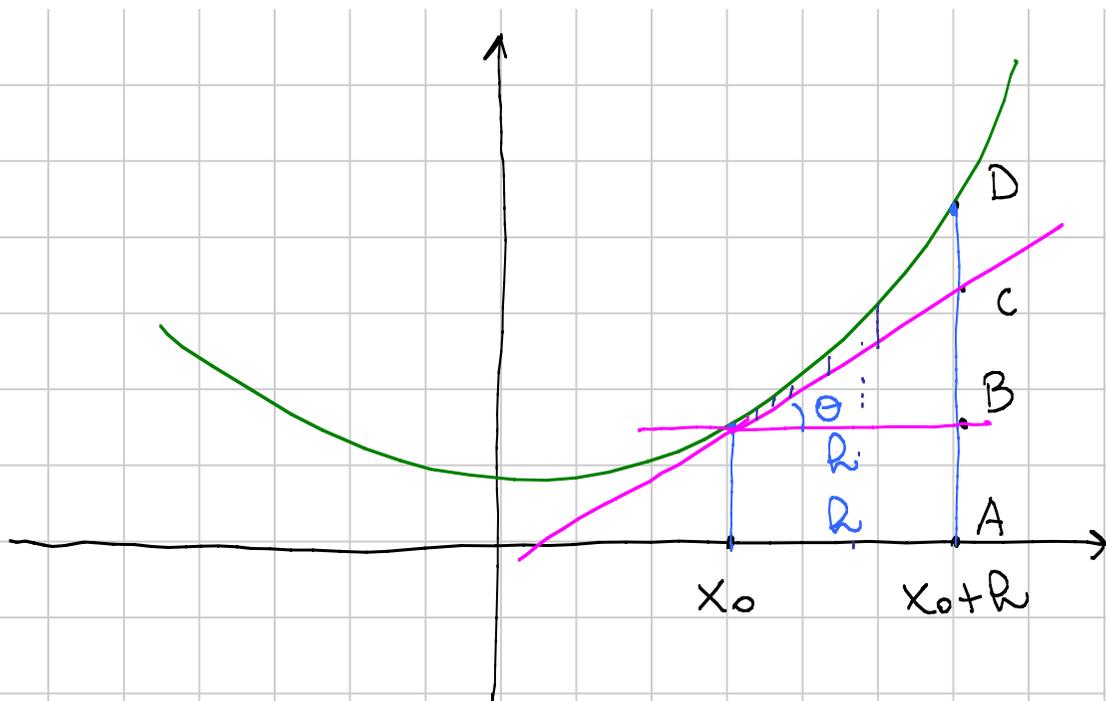
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Teorema f è differenziabile in $x_0 \iff f$ è derivabile in x_0 .

Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

FORMULA DEL DIFFERENZIALE
IN UNA VARIABILE



triangoli rettangoli

$$BC = R \cdot \tan \theta$$

↑
coeff. ang.
retta tg. →
cioè $f'(x_0)$

$$AD = AB + BC + CD$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + R \cdot f'(x_0) + o(R)$$

Per $R \rightarrow 0$

NON
CAMBIA

→ o linearm.
con R

→ o + velocemente
di R

Derivate parziali e o piccolo

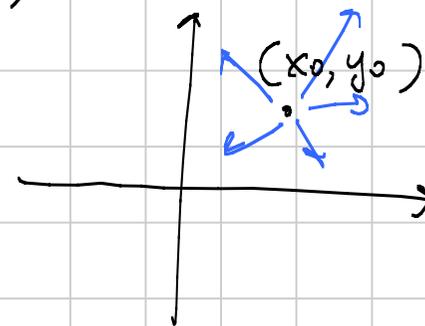
In 2 variabili. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Derivata parziale risp. ad x :

$$f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + o(h)$$

Deriv. parz. rispetto ad y

$$f(x_0, y_0 + h) = f(x_0, y_0) + h f_y(x_0, y_0) + o(h)$$



$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \boxed{?}$$

$o(h, k)$

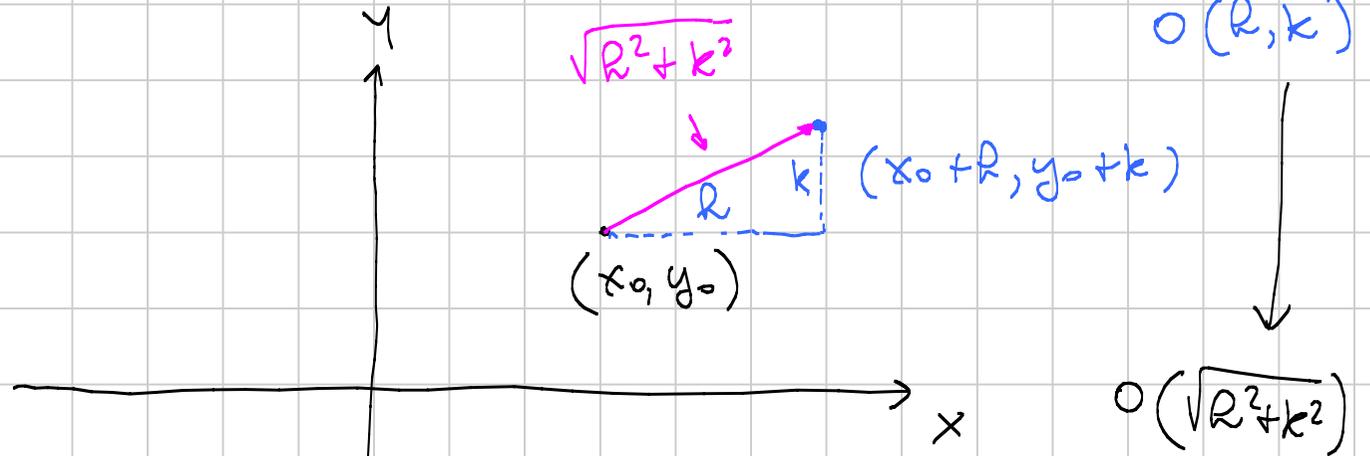
spostamento
descritto da 2
variabili
INDIPENDENTI

ANALISI II CIV.

ORA 7

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \boxed{?}$$

spostamento
descritto da 2
variabili
INDIPENDENTI



$o(h, k)$

$o(\sqrt{h^2+k^2})$

Cosa vuol dire $o(\sqrt{h^2+k^2})$? Vuol una funzione $r(h, k)$ tale che

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

LIMITE IN 2 VARIABILI

residuo
↓

In n variabili. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R \in \mathbb{R}^n$
 $x = (x_1, \dots, x_n)$ $\uparrow R = (R_1, \dots, R_n)$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \boxed{R_1 f_{x_1}(x_0) + R_2 f_{x_2}(x_0) + \dots + R_n f_{x_n}(x_0)} + o(\sqrt{R_1^2 + \dots + R_n^2})$$

PRODOTTO SCALARE TRA IL VETTORE R

ed il vettore $(f_{x_1}(x_0), f_{x_2}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$

\downarrow
 $\|R\|$
lungh. spost.

Def. Questo vettore si chiama GRADIENTE di f nel p.to x_0 . (= vettore che ha come componenti le n deriv. parz. di f nel p.to x_0)

Si indica con
NABLA

$$\boxed{\nabla f(x_0)}$$

Con queste notazioni: DIFF. IN PIÙ VARIABILI

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot \nabla f(x_0) + o(\|h\|)$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
vettori

↑
prodotto scalare

Derivate direzionali e differenziale. Prendiamo una direzione

v con $\|v\| = 1$ (vettore). L'incremento è $t v = h$

↑ ↑ ↑
vett. vett.

↑
numero che $\rightarrow 0$

Uso formula prec.

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + t \underbrace{(v \cdot \nabla f(x_0))}_{\text{NUMERO}} + o(t)$$

↑
 $\|tv\| = t$

↑
o piccolo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

sostituire

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + t(v \cdot \nabla f(x_0)) + o(t) - \cancel{f(x_0)}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[v \cdot \nabla f(x_0) + \frac{o(t)}{t} \right] = v \cdot \nabla f(x_0)$$

Formula per calcolare le derivate direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = v \cdot \nabla f(x_0)$$

Vale anche se v
non è un vettore

Esempi. ① $f(x, y) = x^2 - 3xy$ $(x_0, y_0) = (2, 1)$
 $U = (1, 1)$, Calcolare $\frac{\partial f}{\partial U}(2, 1)$

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (2x - 3y, -3x)$$

$$\nabla f(2, 1) = (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1, -3 \cdot 2) = (1, -6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial U}(2, 1) = U \cdot \nabla f(2, 1) = (1, 1) \cdot (1, -6)$$

$$= 1 - 6 = -5$$

Esempio ② $f(x, y) = e^{xy} + x^3 e^y$ $U = (-1, 3)$

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial U}(0, 1)$

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (ye^{xy} + 3x^2e^y, xe^{xy} + x^3e^y)$$

$$\nabla f(0, 1) = (1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 1) = \nu \cdot \nabla f(0, 1) = (-1, 3) \cdot (1, 0) = -1.$$

— 0 — $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{pr. sc.}}$ — 0 —

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) = \nu \cdot \nabla f(x_0) \quad \text{Supp. } \nu \text{ versore}$$

$$= \|\nu\| \cdot \|\nabla f(x_0)\| \cdot \cos \theta$$

↑
mult.

↑
mult

↑ Angolo tra
 ν e $\nabla f(x_0)$

$$= \|\nabla f(x_0)\| \cdot \cos \theta$$

Se voglio $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ massima, devo prendere $\theta = 0$, cioè

devo prendere v nella stessa direzione di $\nabla f(x_0)$ (stesso verso)

Se voglio $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ minima, devo prendere $\theta = 180^\circ$, cioè

v nella stessa direzione di $\nabla f(x_0)$, ma verso opposto.

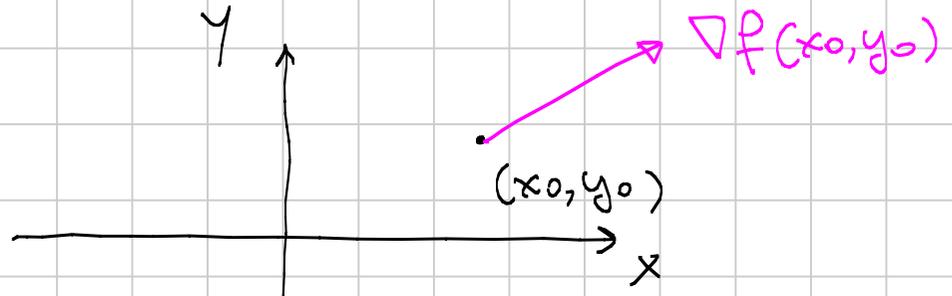
Se voglio $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$, basta che prenda $v \perp \nabla f(x_0)$.

GRADIENTE = direzione nella quale la funzione
tende a salire + rapidamente

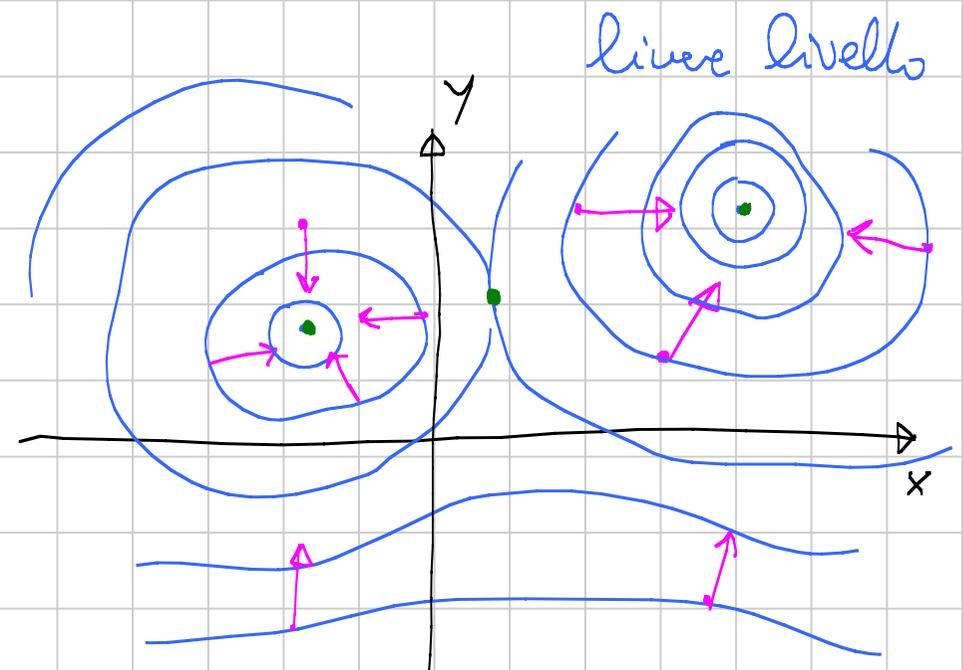
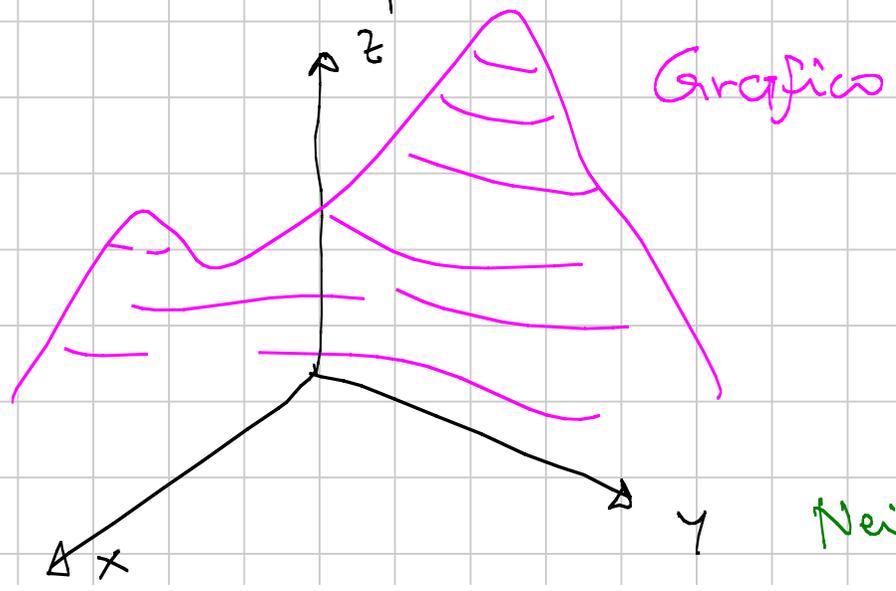
$f(x,y)$ 2 variabili

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Il gradiente si

rappresenta nel piano



∇f è \perp alle linee di livello



Nei p.ti verdi $\nabla f = 0$

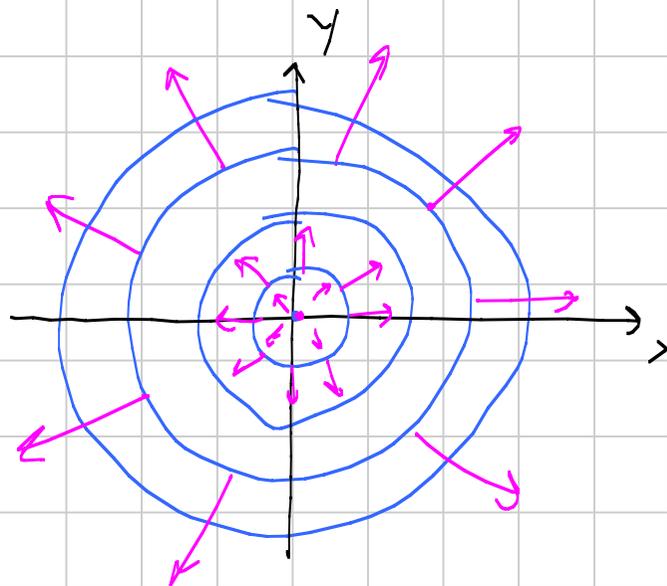
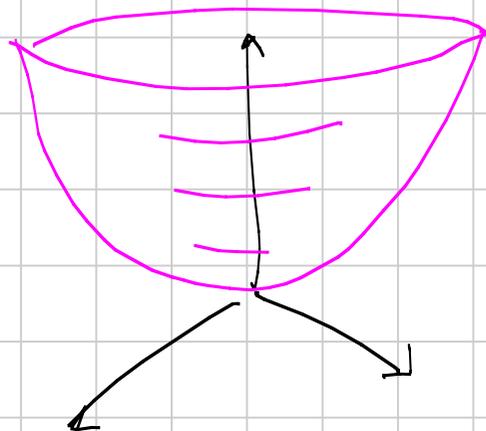
ANALISI II CIV (NOCL.)

ORA 8

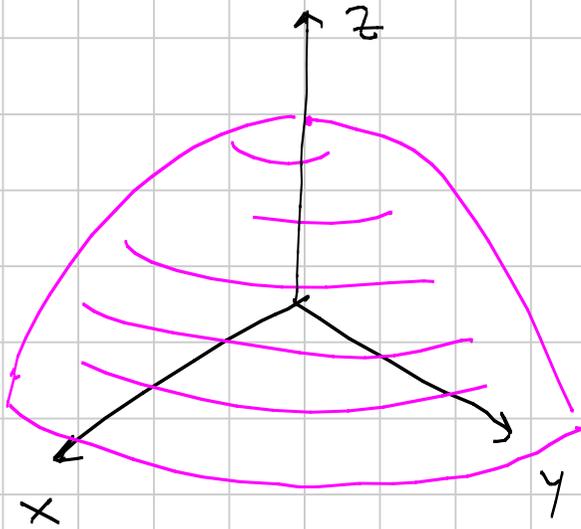
Esempi $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

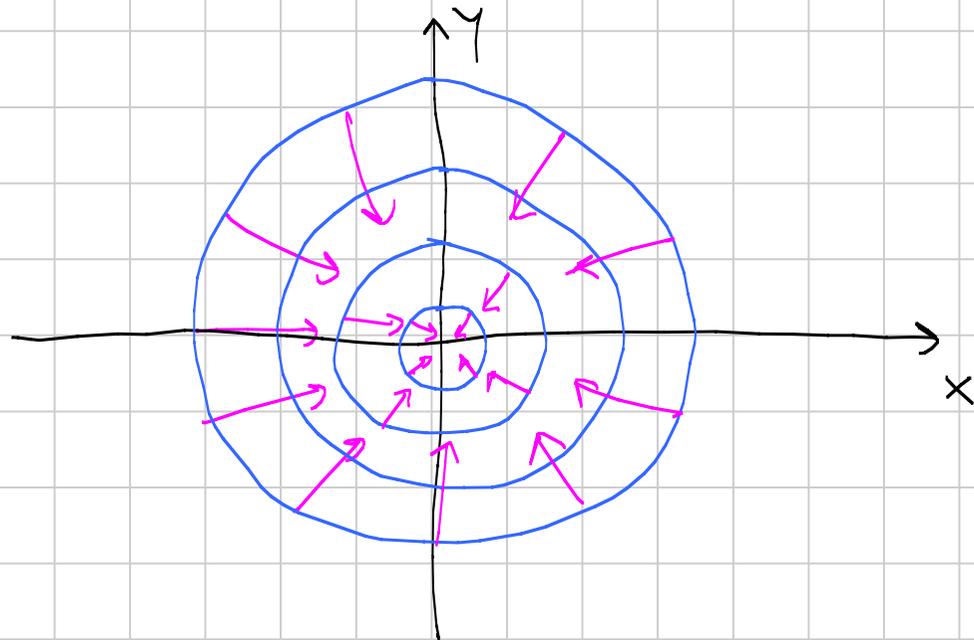
In $(0, 0)$, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$



$$f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$$



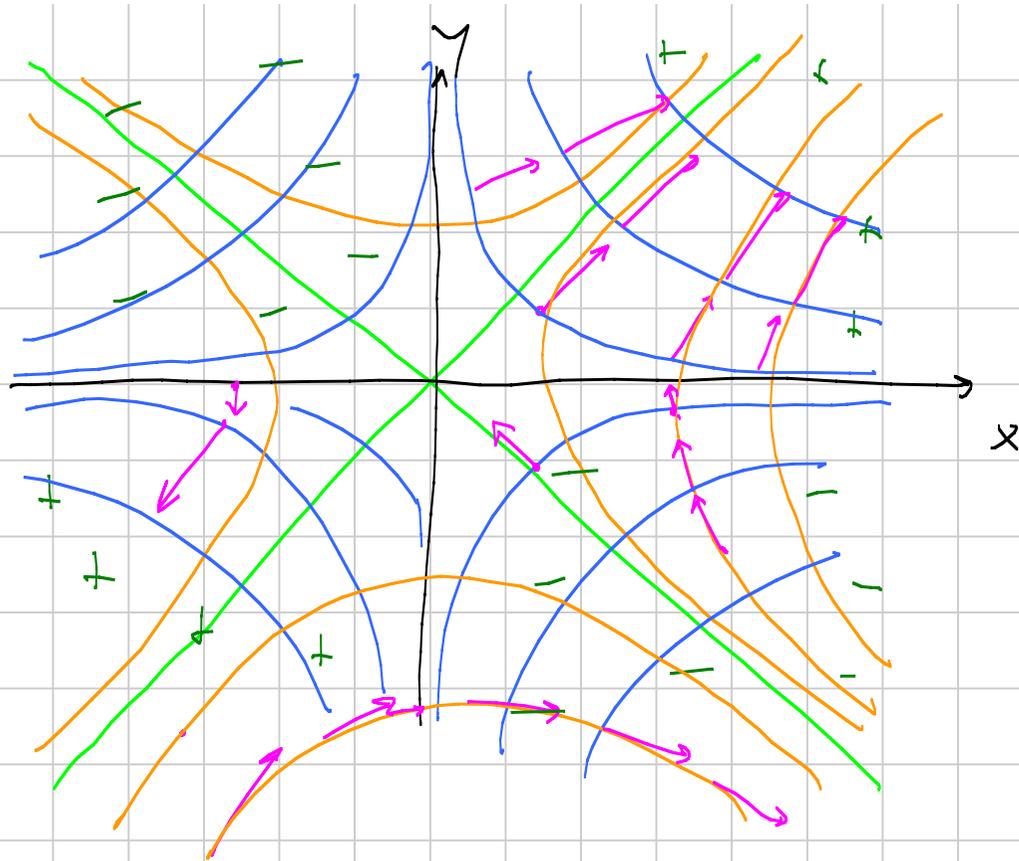
$$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y)$$



$$f(x, y) = xy$$

$$xy = \lambda$$

Le iperbole arancio
& quelle blu sono
tra di loro \perp

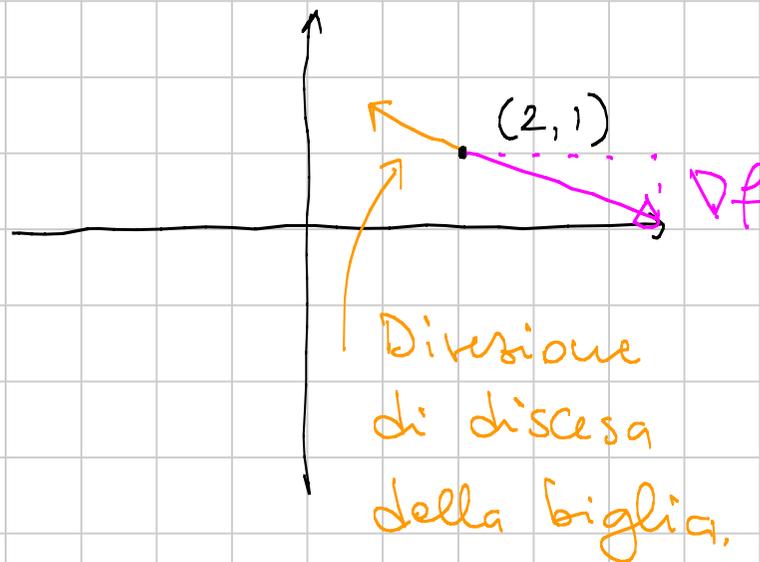


Esempio $f(x, y) = x^2 - y^4 + xy$ montagna

In quale direzione scende
una biglia posta nel p.to
con. a $(2, 1)$?

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, -4y^3 + x)$$

$$\nabla f(2, 1) = (5, -2)$$



In 1 variabile : $f'(x_0) =$ coeff. ang. retta tangente

$$y = f'(x_0) \underbrace{(x - x_0)}_h + f(x_0)$$

retta che passa
per $(x_0, f(x_0))$
e ha coeff. ang. $f'(x_0)$

In 2 variabili il piano tangente al grafico ha equazione

$$Z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

↑
eq. del piano che approssima il grafico di f vicino al p.to (x_0, y_0) commettendo un errore che è

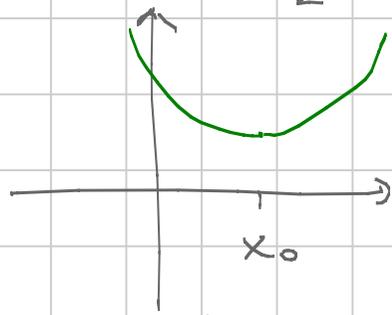
$$o(\|R\|) \quad R = (x - x_0, y - y_0)$$

In 1 variabile: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$ retta tangente // asse x

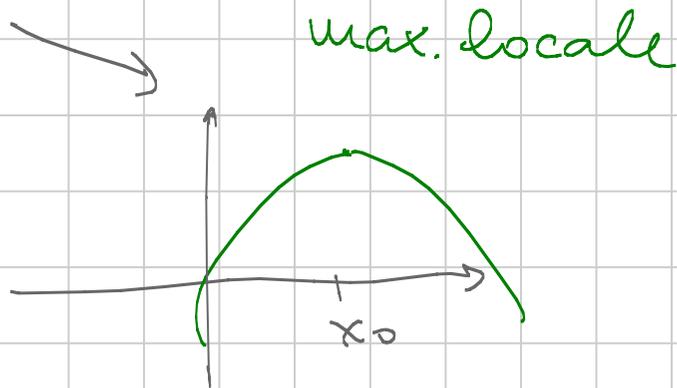
In 2 variabili: $\nabla f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f_x = 0$ e $f_y = 0$ nel p.to
 \Leftrightarrow piano tangente // al
piano base x, y

In 1 variabile

$$f'(x_0) = 0$$

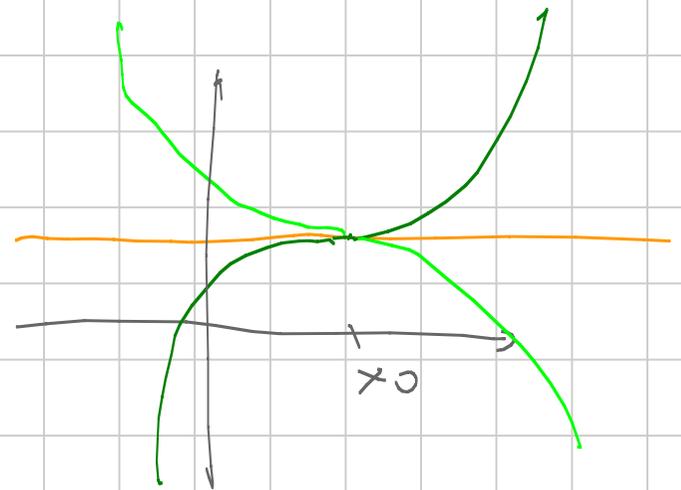


min. locale



max. locale

Flessi e roba strana
a fg. orizzontale



In 2 variabili

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

Max. locale

min. locale

MOUNTAIN PASS

PUNTI DI SELLA

Flessi e roba
strana

Def. Un p.to si dice stazionario se ∇f si annulla in quel p.to.

Massimi e minimi in + variabili

Teo. WEIERSTRASS

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua,

allora esistono

↑ ↑
estremi compresi

$\max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$

$\min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$

↖ Valori massi
mo e minimo
("delle y")

I p.ti in cui vengono assunti si chiamano p.ti di max
e p.ti di min

Dove cercare i p.ti di max e di min?

In caso di questi 3 posti

① Nei p.ti x dell'intervallo (a, b)
in cui $f'(x) = 0$

PUNTI
STAZIONARI
INTERNI

② Nei p.ti x dell'intervallo (a, b)
in cui f' non esiste

PUNTI SINGOLARI
INTERNI

③ Agli estremi dell'intervallo
 $x = a$ e $x = b$

PUNTI DEL
BORDO