

Esempio 1

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

→ Dimostrare che definisce una $f \in C^0(\mathbb{R})$

Conv. puntuale per ogni $x \in \mathbb{R}$ per assoluta conv. + confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$.

Per la continuità serve conv. unif.

C'è conv. unif. su tutto $\mathbb{R}$? NO! Se ci fosse, per cond. nec.

$$\sup \left\{ \left| \sin\left(\frac{x}{n^2}\right) \right| : x \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow 0$$

Ma il sup è sempre 1 ☹️

Speriamo nella conv. unif. sui compatti. Prendo $[-A, A]$ e calcolo

$$|f_n(x)| = \left| \sin\left(\frac{x}{n^2}\right) \right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{A}{n^2} \quad \forall x \in [-A, A]$$

$\uparrow$
 $|\sin t| \leq |t|$

$\stackrel{\text{"Mn"}}{\leq}$

In $[-A, A]$ vale M-test, e quindi ho conv. unif.

↪ ho continuità in $[-A, A]$ e quindi cont. in $\mathbb{R}$

(achtung! La cont. si rincolla, l'unif. conv. no)

→ Dimostrare che $f \in C^1(\mathbb{R})$

Provo con la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n^2}$$

Questa conv. unif. su tutto $\mathbb{R}$ perché

$$\sup \{ |f_n'(x)| : x \in \mathbb{R} \} \leq \frac{1}{n^2}$$

e quindi ho conv. tot. su tutto $\mathbb{R}$.

Ora applico tes. scambio della derivata

→ In modo analogo si ottiene $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = f(x)$$

→ Dimostrare che $f \in C^0((1, +\infty))$

Conv. puntuale è Analisi 1.

Ho conv. unif. in $(1, +\infty)$? BOH!

$$\sup \left\{ \frac{1}{n^x} : x > 1 \right\} = \frac{1}{n}$$

Quindi $\sum \sup = +\infty \Rightarrow$ niente conv. normale $\Rightarrow$ BOH

Ho conv. unif. sulle semirette $[A, +\infty)$ con $A > 1$. Infatti

$$\sup \left\{ \frac{1}{n^x} : x \geq A \right\} = \frac{1}{n^A}$$

In $[A, +\infty)$ ho conv. tot., quindi conv. unif., quindi continuità. Riincollando ho continuità in $(1, +\infty)$.

→ Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Fa 1 (per colpa di $f(x)$ che tende a 1)

Avevamo conv. unif. sulle semirette uso teo. di scambio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1$$

0
tranne che per $n=1$

→ Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Non posso usare il teorema di scambio !!!! ☹️

Sfrutto che $f_n(x) \geq 0$. Allora per ogni $x > 1$ e ogni $n \geq 1$ vale

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} = S_n(x)$$

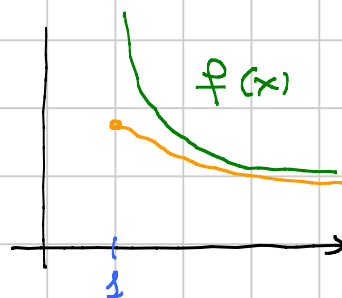
Faccio $\liminf$ a dx e sx:

$$\liminf_{x \rightarrow 1^+} f(x) \geq \liminf_{x \rightarrow 1^+} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Essendo vero per ogni $n \in \mathbb{N}$ deduco che

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

→ Ma c'è conv. unif. su $(1, +\infty)$?



No! Ora sappiamo che $f(x)$ non è limitata su $(1, +\infty)$, mentre tutte le $S_n(x)$ lo sono.

FATTO GENERALE Se φ_n sono limitate in S (con limitazione dipendente da n) e φ_∞ è NON limitata in S , allora φ_n NON può tendere unif. a φ_∞ in S .

[Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $\sup_{x \in S} |\varphi_\infty(x) - \varphi_n(x)| = +\infty$]

Esempio 3 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+x^{2^n})$

→ Dimostrare che $f \in C^1((-1,1))$

Dimostriamo conv. totale in $[-A, A]$ per ogni $A \in (0,1)$ anche per la serie delle derivate

$$|f_n(x)| \leq |x^{2^n}| \leq A^{2^n}$$

$\uparrow$ $\log(1+t) \leq t$ per ogni $t \geq 0$ $\parallel$ M_n

$\sum M_n$ è una geometrica di ragione $A^2 \in (0,1)$, quindi converge.

Da qui al solito modo abbiamo $f \in C^0((-1,1))$.

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}} \right| \leq 2^n A^{2^n-1}$$

e concludo osservando che $\sum n A^{2^n-1} < +\infty$

→ Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Non posso usare teo. scambio, ma come prima

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^n \log(1+x^{2^k}) \quad \forall x \in (-1,1) \quad \forall n \geq 1$$

Faccio liminf a dx e sx

$$\liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x) \geq \liminf_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^n \log(1+x^{2k}) = n \log 2$$

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

→ C'è conv. unif. su $(-1, 1)$

NO! Per il fatto generale ($f(x)$ non è limitata, $S_n(x)$ sì).

Esempio 4 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{nx} - 1}{n+3} \quad x > 0$

→ Puntuale

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{1}{n} \log(nx)} - 1}{n+3} \quad \begin{matrix} e^t \sim 1+t \\ \sim \frac{\log n}{n^2} \end{matrix}$$

→ conv. puntualmente per ogni $x > 0$.

→ Conv. unif. sugli intervalli $[A, B]$ con $A > 0$.

Speriamo nella totale

$$|f_n(x)| = \frac{|e^{\frac{1}{n} \log(nx)} - 1|}{n+3}$$

Ora mi serve una disug. del tipo $|e^t - 1| \leq L|t|$ per $t \in [-M, M]$.

Detto meglio: per ogni $M > 0$ esiste $L > 0$ t.c.

$$|e^t - 1| \leq L|t| \quad \forall t \in [-M, M]$$

Basta dim. che quando $x \in [A, B]$ abbiamo che $t \in [-M, M]$

con M opportuno. limitato se $x \in [A, B]$

$$|t| = \frac{|\log(mx)|}{n} \leq \frac{|\log x|}{n} + \boxed{\frac{|\log m|}{n}}$$

limitato

In ogni intervallo $[A, B]$ con $A > 0$ vale

$$|f_n(x)| \leq L \frac{|\log(mx)|}{n} \frac{1}{n+3} \leq \frac{\text{cost} \cdot \log m}{n(n+3)}$$

e quindi abbiamo conv. totale $\Rightarrow$ conv. in $(0, +\infty)$.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(Solito trucco di usare la somma parziale)

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ non è ovvio}$$

(Se potessi scambiare sarebbe $-\infty$).

(Esercizio 😊) (Occhio: le $f_n(x)$ non hanno un segno in un intorno di 0!!!)

— 0 — 0 —

[Hint per l'esercizio: aggiungere e togliere $\sqrt[n]{n}$ al numeratore]