ANALISI 2 - LEZIONE 007

Note Title 03/10/2017

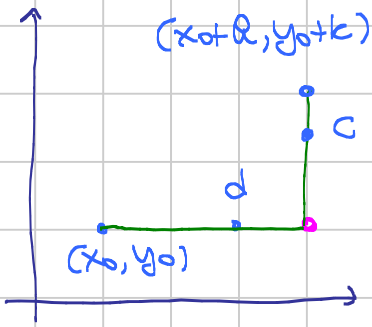
Come dimostro che $f(x)$ è diff. in x_0 ?

Risposta: se le derivate parziali esistono e sono continue, allora ok.

$\boxed{\text{Teorema del differenziale totale}}$ (In ipotesi comode)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\delta > 0$, e sia $f : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che tutte le derivate parziali di f
(i) esistano in $B_\delta(x_0)$,
(ii) siano continue in x_0.
Allora f è diff. in x_0.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per semplicità consideriamo il caso $n=2$, quindi $x_0 \rightsquigarrow (x_0, y_0)$



$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$= k\, f_y(x_0+h, y_0+c) \qquad \text{(Lagrange in } y\text{)}$$
$$+ h\, f_x(x_0+d, y_0) \qquad \text{(Lagrange in } x\text{)}$$

$$= \boxed{k\, f_y(x_0, y_0)} + \underbrace{\boxed{\begin{array}{l} k\,[f_y(x_0+h, y_0+c) - f_y(x_0,y_0)] \\ + h\,[f_x(x_0+d, y_0) - f_x(x_0,y_0)] \end{array}}}_{r(h,k)}$$
$$+ \boxed{h\, f_x(x_0, y_0)}$$

Resta da dim. che $r(h,k) = o(\sqrt{h^2+k^2})$, cioè

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|r(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Basta dim. per i 2 termini separatamente

$$0 \le \boxed{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}} \boxed{|f_y(x_0+h, y_0+c) - f_y(x_0,y_0)|}$$

≤ 1 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow 0$

perché quando $(h,k) \to (0,0)$ anche $(h,c) \to (0,0)$ e abbiamo supposto f_y continua in (x_0,y_0)

L'altro termine è analogo usando la continuità di f_x.

— o — o —

Oss. Abbiamo usato ipotesi (i) nel fare Lagrange e (ii) per passare al limite alla fine.

Oss. Se fossimo in dim n, dovremmo aggiungere e togliere $n-1$ p.ti in modo da fare n volte Lagrange, oppure procedere per induzione (esercizio di formalizzazione).

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema del diff. totale}}$ (risparmioso) (versione $\mathbb{R}^2$)

Sia $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, sia $\delta > 0$, sia $f : (x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\delta, y_0+\delta) \to \mathbb{R}$

Supponiamo che

(i) $f_y(x,y)$ esista in tutto il rettangolo,

(ii) " continua in (x_0, y_0),

(iii) $f_x(x,y)$ esista (anche solo) in (x_0,y_0).

Allora $f(x,y)$ è diff. in (x_0,y_0).

$\boxed{\text{Dim.}}$ Procediamo come prima

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) \\ &\quad + f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) \\ &= k\, f_y(x_0+h, y_0+c) \\ &\quad + f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$= \boxed{k f_y(x_0,y_0)} + \boxed{k\,[f_y(x_0+h, y_0+c) - f_y(x_0,y_0)]}$ come prima

$+ \boxed{h f_x(x_0,y_0)} + [f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - h f_x(x_0,y_0)]$

corretto dopo video

Resta da trattare l'ultimo termine, cioè

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - h f_x(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Il numeratore non dipende da k, e il denom è $\geq |h|$.
Quindi

$$0 \leq |\text{frazione}| \leq \left| \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}}}_{\to f_x(x_0,y_0)} - f_x(x_0,y_0) \right|$$

$f_x(x_0,y_0)$ per l'ipotesi (iii)

— o — o —

Oss. La versione risparmiosa in n variabili prevede
- esistenza nell'intorno e continuità nel p.to di $n-1$ deriv. parziali
- esistenza nel solo p.to della restante derivata parziale.

— o — o —

Esempio 1 Consideriamo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

È evidente che f è continua e diff. in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (le deriv. parziali non hanno nessun pblm).

Cosa possiamo dire in $(0,0)$?

Continua sì [Passo in coord. polari $\sim \dfrac{\rho^3}{\rho^2} = \rho$]

Le derivate parziali in $(0,0)$ esistono e sono nulle
(sono le derivate delle restrizioni agli assi, che sono $\equiv 0$)
Sia $v=(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ una direzione. Allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha h,\beta h)-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{\alpha^2h^2\beta h}{\alpha^2h^2+\beta^2h^2}=\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Quindi le deriv. esistono MA non rispettano la formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\langle \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\nabla f(0,0)}, v\rangle$$

Quindi f NON è diff. in $(0,0)$.
Si poteva vedere direttamente? SI, usando la def.

Se f fosse diff., dovrebbe valere

$$f(h,k)=\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(0,0)}+\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f_x(0,0)}\,h+\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f_y(0,0)}\,k+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

Quindi dovrebbe essere

$$0=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

(in coord. polari è del tipo $\frac{\rho^3}{\rho^3}$, quindi tira brutta aria)

Rigorosamente: ovviamente $(t,0)$ ottiene 0
ovviamente (t,t) " $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. FINE.

Esempio 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin^4 y}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Questa è diff. in $(0,0)$.

Potrei provare ad usare teo. diff. totale, ma forse la def. è più comoda.

Osservo che $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ (le restrizioni agli assi sono nulle)

[Più in generale $f_x(t,0) = f_y(0,t) = 0$]

quindi mi basta verificare che

$$f(h,k) = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \quad \text{per } (h,k) \to (0,0)$$

$$\underset{\substack{\wr\\ 0}}{0} \leq \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2 \overbrace{\sin^4 k}^{\leq k^4}}{\underbrace{(h^4+k^4)}_{\geq k^4} \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{|h|}} \leq \frac{h^2 \cdot \cancel{k^4}}{\cancel{k^4} \cdot |h|} = \underset{\substack{\wr\\ 0}}{|h|}$$