Introduzione

Cosa *non* sono le schede olimpiche? Un testo nel senso classico della parola. Per diventarlo dovrebbero essere arricchite con motivazioni della teoria, dimostrazioni, esempi di applicazione, esercizi.

Cosa sono le schede olimpiche? Sono una raccolta di strumenti, organizzati per argomento. Questo le rende particolarmente utili per chi ha necessità di consultazione rapida, per chi ha già una conoscenza sommaria di come funzionano le cose e intende approfondirla, per chi ha bisogno di trovare in fretta un risultato ben preciso.

Sono quindi una versione notevolmente arricchita di una “tool chest” o di un glossario; insomma quello che in Italia si chiamerebbe un “bignamino”.

Cosa trattano le schede olimpiche? Si potrebbe dire che queste schede trattano argomenti di “matematica elementare”, ma sarebbe una valutazione soggettiva, in quanto alcuni risultati qui contenuti sono forse “meno elementari” di altri qui non riportati, come le basi del calcolo infinitesimale o differenziale.

Si potrebbe dire che trattano argomenti di “matematica pre-universitaria”, ma anche questo è opinabile in quanto dipende dal sistema scolastico e, per lo meno in Italia, molti degli argomenti trattati in queste schede si vedono al più in qualche corso universitario.

Diciamo quindi più semplicemente che gli argomenti trattati coprono ampiamente quello che è unanimemente riconosciuto, in ambito internazionale, come programma base per le IMO (International Mathematical Olympiad).

Come sono suddivisi gli argomenti? A parte il breve capitolo di preliminari, che contiene una raccolta di strategie per affrontare i problemi e due strumenti fondamentali, il resto del materiale è organizzato in quattro capitoli, seguendo la suddivisione per argomenti usata alle IMO (e del tutto diversa da quella abituale negli ambienti universitari italiani). Tale classificazione si può sommariamente spiegare dicendo che

- se si tratta di punti, rette, circonferenze, allora è *geometria*;
- se si tratta di numeri interi, allora è *teoria dei numeri*;
- se si tratta di numeri reali, polinomi, funzioni, allora è *algebra*;
- se si tratta di qualcos'altro, allora è *combinatoria*.

A chi si rivolgono le schede olimpiche? Come dice il nome, il target dichiarato sono i concorrenti che aspirano a partecipare ad una IMO, ma non solo.

Vale la pena di sottolineare che le IMO sono in fondo una competizione di tipo sportivo, in cui brillantezza, velocità e allenamento giocano un ruolo determinante. Come ricordato una volta da un leader di una squadra olimpica, il progresso della matematica è invece in gran parte dovuto a persone che fanno della determinazione, della tenacia e del duro lavoro le loro doti essenziali.

Trattandosi di una fotografia di quella che internazionalmente è ritenuta una preparazione di eccellenza in matematica, l'opera si rivolge quindi anche, se non soprattutto, a tutte le persone che si riconoscono in questa seconda categoria, in particolare ai ragazzi che concorrono per una scuola d'eccellenza, e più in generale a tutti gli studenti a cui "va un po' stretto" il programma di matematica svolto alle scuole superiori.

In quest'ottica spero che queste schede possano essere utili anche agli insegnanti in cerca di spunti per motivare i loro studenti più interessati e determinati.

Errata corrige Quando si pubblica un testo, ed in particolare un testo scientifico, la presenza di alcuni errori, siano essi di stampa o concettuali, è semplicemente inevitabile. Per questo motivo all'interno della home page dell'autore (facilmente rintracciabile con qualunque motore di ricerca) sarà attiva una sezione appositamente dedicata alla correzione di tali errori. Si invitano dunque i lettori ad inviare le loro segnalazioni all'autore via e-mail.

Quando arriverà altro materiale? Non faccio promesse, se non quella di conservare e riorganizzare pian piano tutto il materiale che viene utilizzato ogni anno per il training olimpico. In attesa di una pubblicazione definitiva, tale materiale resterà a disposizione in internet, raggiungibile dalla home page dell'autore.

Ringraziamenti "Noi siamo nani sulle spalle dei giganti": nulla meglio di questa celebre frase può descrivere una raccolta di schede che nasce dopo 42 edizioni delle IMO e 18 edizioni delle Olimpiadi Italiane di Matematica.

Il mio ringraziamento va pertanto a tutti i colleghi che per anni hanno condiviso questa "attività olimpica", a tutti i concorrenti che hanno lavorato su versioni preliminari di quest'opera, motivandone la stesura e contribuendo al miglioramento ed alla correzione della stessa, ed infine alla "IMO community", un insieme di persone provenienti da più di 80 paesi, che negli anni contribuisce alla promozione ed alla diffusione del "gusto per la matematica" in tutto il mondo.

Senza il loro contributo, quest'opera non sarebbe stata possibile.

L'autore

Pisa, 28 febbraio 2003

Ristampa del 2005 In questa ristampa (marzo 2005) sono stati corretti alcuni errori segnalati da attenti lettori e sono state fatte pochissime aggiunte. Le schede che hanno subito variazioni (anche di un solo carattere) sono le seguenti: Introduzione, P00, A06, A15, C04, G05, G06, N05, N09, N10, Preparazione alle gare, Bibliografia.

Indice

Principio di induzione

In questa scheda indichiamo con $\mathcal{P}_n$ una qualunque proprietà che parla di numeri naturali, cioè una proposizione che dipende da un parametro $n \in \mathbb{N}$ e che può essere vera o falsa a seconda del valore di n.

1. **Forma 1: induzione classica**. Supponiamo che $\mathcal{P}_n$ soddisfi le seguenti proprietà:

   (i) $\mathcal{P}_0$ è vera,

   (ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha l'implicazione: $\mathcal{P}_n$ vera $\Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ vera.

   Allora $\mathcal{P}_n$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. **Forma 2: induzione estesa**. Supponiamo che $\mathcal{P}_n$ soddisfi le seguenti proprietà:

   (i) $\mathcal{P}_0$ è vera,

   (ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha l'implicazione: $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$ vere $\Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ vera.

   Allora $\mathcal{P}_n$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3. **Forma 3: principio del minimo intero**. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un sottoinsieme non vuoto. Allora A ammette minimo, cioè esiste un elemento $m \in A$ tale che $m \leq a$ per ogni $a \in A$.

4. **Forma 4: principio della discesa infinita**. Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ una successione di numeri naturali tali che $a_i \leq a_j$ per ogni $i \geq j$ (una successione che verifica questa proprietà si dice "debolmente decrescente" oppure "non crescente"). Allora a_n è costante da un certo punto in poi.

5. **Equivalenza**. Le quattro forme del principio di induzione sono equivalenti, nel senso che *assumendone* vera una qualunque si possono *dimostrare* le altre tre.

6. **Le tessere del domino**. L'induzione si può intuitivamente giustificare nel modo seguente. Dobbiamo dimostrare che tutte le $\mathcal{P}_n$ sono vere. Per la (i) sappiamo che $\mathcal{P}_0$ è vera, dunque per almeno un valore di n siamo a posto. Ora, per la (ii) con $n = 0$, sapendo che $\mathcal{P}_0$ è vera, possiamo dedurre che anche $\mathcal{P}_1$ è vera. Applicando ora la (ii) con $n = 1$, e sapendo che $\mathcal{P}_1$ è vera, possiamo dedurre che anche $\mathcal{P}_2$ è vera. Procedendo in questo modo, segue che una qualunque delle $\mathcal{P}_n$ è vera.

   Per questo motivo l'induzione è come quel gioco che consiste nel mettere in piedi tante tessere di domino in modo che ognuna, cadendo, faccia cadere anche la successiva (il che è brutalmente il contenuto della (ii)). Una volta che cade la tessera iniziale, allora prima o poi cadono tutte le altre.

7. **Achtung!** Nel verificare operativamente che $\mathcal{P}_n$ soddisfa la proprietà (ii) prevista nel principio di induzione (detta *passaggio induttivo*), occorre "supporre che $\mathcal{P}_n$ sia vera, ed usando questa ipotesi dimostrare che $\mathcal{P}_{n+1}$ è vera". Dunque in tale fase l'ipotesi è "$\mathcal{P}_n$ è vera" e la tesi è "$\mathcal{P}_{n+1}$ è vera".

   Discorso analogo vale per la seconda forma di induzione, con l'unica differenza che ora nel passaggio induttivo l'ipotesi è che tutte le precedenti (non solo l'ultima) sono vere.

8. **Variante banale**. Se nella forma 1 o 2 di induzione sostituiamo la (i) con "$\mathcal{P}_{100}$ è vera", allora la tesi finale sarà che "$\mathcal{P}_n$ è vera per ogni $n \geq 100$".

Polinomi 3 – Radici e fattorizzazione

1. **Radici di un polinomio**. Si dice che il numero α è *radice* del polinomio $p(x)$ se $p(\alpha) = 0$. Si dice che α è una radice intera, razionale, reale, complessa, a seconda che α sia un numero intero, razionale, reale, complesso.

2. **Molteplicità di una radice di un polinomio**. Sia α una radice di un polinomio $p(x)$. Diciamo che il numero intero m è la *molteplicità* di α se $p(x)$ è divisibile per $(x - \alpha)^m$, ma non è divisibile per $(x - \alpha)^{m+1}$. La molteplicità di una radice è sempre ≥ 1 e $\leq$ del grado di $p(x)$. Le radici di molteplicità 1 si dicono *semplici*.

3. **Radici complesse**. Un polinomio di grado n a coefficienti complessi ha *esattamente* n radici complesse, se ogni radice viene contata tante volte quante è la sua molteplicità.

   A maggior ragione un polinomio a coefficienti reali (o razionali o interi) ha esattamente n radici complesse, dunque al massimo n radici reali, razionali o intere.

4. **Fattorizzazione sui complessi**. Un polinomio di grado n a coefficienti complessi monico si può scrivere come prodotto di n polinomi di grado 1 a coefficienti complessi. La fattorizzazione è unica a meno dell'ordine dei fattori. In particolare, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono le n radici (ogni radice è stata ripetuta a seconda della sua molteplicità), allora

$$p(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n).$$

5. **Radici complesse di polinomi a coefficienti reali**. Se α è una radice di un polinomio $p(x)$ a coefficienti *reali*, allora anche il suo coniugato $\overline{\alpha}$ è radice di $p(x)$. Inoltre α e $\overline{\alpha}$ hanno la *stessa molteplicità*.

6. **Fattorizzazione sui reali**. Un polinomio a coefficienti reali monico si può scrivere come prodotto di polinomi di grado 1 e 2 a coefficienti reali. La fattorizzazione è unica a meno dell'ordine dei fattori.

   Tale fattorizzazione segue da quella complessa: i fattori di primo grado derivano dalle radici reali, quelli di secondo grado derivano accoppiando le radici complesse coniugate non reali.

7. **Esistenza di radici reali**. Un polinomio a coefficienti reali di grado *dispari* ha sempre almeno una radice reale. Se il grado è pari, può non avere nessuna radice reale.

8. **Esistenza di radici reali in un intervallo**. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali, e siano a, b due numeri reali tali che $a < b$ e $p(a) \cdot p(b) < 0$ (cioè il polinomio assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo $[a, b]$). Allora esiste almeno una radice reale di $p(x)$ appartenente all'intervallo aperto $]a, b[$.

9. **Radici reali positive: Regola di Cartesio**. Prendiamo un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali e scriviamo di fila i suoi coefficienti non nulli; contiamo poi in questa fila quante variazioni di segno ci sono. Allora il numero delle radici *reali positive* di $p(x)$, contate con molteplicità, è minore od uguale del numero delle variazioni di segno. Inoltre i due numeri hanno la stessa parità.

10. **Radici razionali di un polinomio a coefficienti interi**. Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi, e $\alpha = p/q$ è una *radice razionale* di $p(x)$ ridotta ai minimi termini (cioè la frazione è stata semplificata), allora p è un divisore di a_0 e q è un divisore di a_n.

Disuguaglianze 4 – Cauchy-Schwarz

1. **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**. Siano $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ due n-uple di *numeri reali* (di segno qualunque). Allora

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Inoltre vale il segno di uguale se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$b_i = \lambda a_i$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$ (o viceversa $a_i = \lambda b_i$).

2. **Caso particolare**. Se $b_1 = \ldots = b_n = 1$, allora la disuguaglianza diventa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot n.$$

Inoltre vale il segno di uguale se e solo se gli a_i sono tutti uguali.

3. **Cauchy-Schwarz e discriminanti**. Consideriamo il polinomio

$$p(t) = (a_1 + b_1 t)^2 + \ldots + (a_n + b_n t)^2.$$

È chiaro che si tratta di un polinomio di secondo grado nella variabile t. Inoltre $p(t) \geq 0$ per ogni valore di t, dal momento che si tratta di una somma di quadrati. Pertanto il discriminante di questo polinomio deve essere ≤ 0. Scrivendo i coefficienti del polinomio, ed imponendo questa condizione sul discriminante, si ottiene esattamente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

4. **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in notazione vettoriale**. In notazione vettoriale possiamo riscrivere la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz nella seguente forma. Se X e Y sono due vettori n-dimensionali, allora

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|.$$

Inoltre vale il segno di uguale se e solo se il vettore X ed il vettore Y sono l'uno un multiplo dell'altro (nota bene: il puntino al primo membro indica il prodotto scalare tra il vettore X ed il vettore Y, il puntino al secondo membro indica il prodotto tra le norme dei due vettori, che sono numeri reali).

Si noti infine che il polinomio $p(t)$ introdotto al punto precedente si può scrivere in notazione vettoriale nella forma

$$p(t) = \|X + tY\|^2.$$

Funzioni 2 – Iniettività e surgettività

1. **Iniettività**. La funzione f si dice *iniettiva* se per ogni x_1 e x_2 in A vale l'implicazione
$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$
Analogamente si può dire che f è iniettiva se per ogni x_1 e x_2 in A vale l'implicazione
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

2. **Surgettività**. La funzione f si dice *surgettiva* se, per ogni $b \in B$, esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Questo è equivalente a dire che $f(A) = B$, cioè che l'immagine dell'insieme di partenza coincide con tutto l'insieme di arrivo.

3. **Bigettività**. La funzione f si dice *bigettiva* se è contemporaneamente iniettiva e surgettiva.

4. **Invertibilità**. La funzione f si dice *invertibile* se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che
$$g(f(a)) = a \qquad \forall a \in A,$$
$$f(g(b)) = b \qquad \forall b \in B.$$
In tal caso la funzione g si dice *funzione inversa* della f, e si indica talvolta con f^{-1}.

5. **Invertibilità = Bigettività**. Una funzione f è invertibile se e solo se è bigettiva. Per questo motivo i due termini vengono di solito usati come sinonimi.

6. **Achtung!** In matematica si usa il simbolo f^{-1} per indicare almeno tre cose completamente diverse: la funzione inversa, la funzione $1/f(x)$, la controimmagine. Solo il contesto permette di capire con quale significato è stato usato il simbolo.

7. **Composizioni**. Una composizione di funzioni iniettive è ancora iniettiva. Una composizione di funzioni surgettive è ancora surgettiva.

8. **Viceversa**. Se una composizione di funzioni è iniettiva, allora la più interna è iniettiva. Se una composizione di funzioni è surgettiva, allora la più esterna è surgettiva. In simboli:
$$f_1 \circ \ldots \circ f_k \text{ iniettiva} \implies f_k \text{ iniettiva ;}$$
$$f_1 \circ \ldots \circ f_k \text{ surgettiva} \implies f_1 \text{ surgettiva .}$$

9. **Caso particolare in cui $A = B$ e $k = 2$**. Per una funzione $f : A \to A$ si ha che
$$f \circ f \text{ iniettiva} \iff f \text{ iniettiva;}$$
$$f \circ f \text{ surgettiva} \iff f \text{ surgettiva.}$$

10. **Equazioni e iniettività**. Se la funzione f è iniettiva, allora
$$f(A) = f(B) \iff A = B,$$
qualunque siano le espressioni A e B. Brutalmente questo vuol dire che "una funzione iniettiva può essere impunemente semplificata nelle equazioni".

Fattoriali e binomiali

1. **Definizione di fattoriale**. Dato un intero $n \geq 1$, si indica con $n!$ il *fattoriale* di n, definito come il prodotto di tutti gli interi da 1 a n. Pertanto:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

   Si pone poi per definizione $0! = 1$.

2. **Definizione per ricorrenza di fattoriale**. Il fattoriale si può anche definire per ricorrenza ponendo

   - $0! = 1$,
   - $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3. **Definizione di binomiale**. Siano $0 \leq h \leq n$ due interi. Si chiama *binomiale* il numero

$$\binom{n}{h} = \frac{n!}{h!(n-h)!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-h+1)}{h!}.$$

   Tale numero, che è sempre un intero, si legge "n su h".

4. **Simmetria dei binomiali**. Siano $0 \leq h \leq n$ due interi. Allora

$$\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}.$$

5. **Relazione ricorsiva tra i binomiali**. Siano $0 \leq h \leq n$ due interi. Allora

$$\binom{n}{h} + \binom{n}{h+1} = \binom{n+1}{h+1}.$$

6. **Triangolo di Tartaglia**. I coefficienti binomiali $\binom{n}{h}$ con $h = 0, 1, \ldots, n$ sono quelli che occupano la n-esima riga del *Triangolo di Tartaglia*.

7. **Binomio di Newton**. Per ogni $n \geq 0$ si ha che

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} \frac{n!}{i!\,j!} x^i y^j.$$

8. **Trinomio di Newton**. Per ogni $n \geq 0$ si ha che

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} \frac{n!}{i!\,j!\,k!} x^i y^j z^k.$$

   Analoghe formule valgono per potenze di somme di più di tre termini.

Colorazioni

Questa scheda non contiene enunciati ben precisi, ma solo esempi volti ad illustrare una tecnica molto efficace soprattutto nel costruire invarianti.

1. **Esempio 1**. Consideriamo il movimento "ad L" di un cavallo su una scacchiera. In tal modo il cavallo passa sempre da una casella bianca ad una casella nera, o viceversa. Pertanto "il colore della casella occupata" è una quantità che si controlla molto semplicemente.

2. **Esempio 2**. Consideriamo una tabella rettangolare, suddivisa in tanti quadratini uguali. Supponiamo che i quadratini siano colorati di bianco o di nero "a scacchiera". Supponiamo ora di avere a disposizione delle mattonelle 2×1, con le quali vogliamo pavimentare la tabella in modo che ogni mattonella occupi esattamente due quadratini. È chiaro allora che ogni mattonella, comunque disposta, occuperà sempre un quadratino bianco e uno nero.

   Questo esempio può anche essere interpretato in termini di invarianti. Si pensi ad una mossa come il piazzare una piastrella. Allora un invariante è "la differenza tra il numero di caselle bianche ricoperte ed il numero di caselle nere ricoperte". Tale differenza è sempre zero.

3. **Esempio 3**. Consideriamo una tabella rettangolare come nell'esempio precedente, e supponiamo questa volta che le mattonelle abbiano la forma di una L costituita da quattro quadratini. Coloriamo la tabella a strisce alternate di due colori, bianco e nero. In questo modo ogni mattonella, comunque venga piazzata, occupa sempre tre caselle di un colore e una casella dell'altro.

   Un invariante ad ogni piazzamento di mattonella è dunque "la parità della differenza tra il numero di caselle bianche ricoperte ed il numero di caselle nere ricoperte". Tale differenza è infatti sempre pari.

   Inoltre, dopo aver piazzato un numero pari di mattonelle, avremo ricoperto un numero pari di quadratini bianchi (o neri), e analogamente, dopo aver piazzato un numero dispari di mattonelle, avremo ricoperto un numero dispari di quadratini bianchi (o neri).

4. **Esempio 4**. Consideriamo una tabella suddivisa in quadratini. Allora è possibile colorare i quadratini con due colori in modo che due quadratini dello stesso colore abbiano al più un vertice in comune (basta fare la solita colorazione a scacchiera).

   È possibile inoltre colorare i quadratini con quattro colori in modo che due quadratini qualunque dello stesso colore non abbiano mai nemmeno un vertice in comune.

5. **Esempio 5: il commesso viaggiatore**. Il problema consiste nel fare un percorso che tocca tutti i vertici di un grafo, passando solo una volta per ogni vertice.

   Supponiamo di poter colorare i vertici del grafo con due colori in modo che ogni lato abbia gli estremi di colore diverso (questo vuol dire che il numero cromatico del grafo è 2). Supponiamo inoltre che in tal modo la differenza tra il numero di punti di un colore e il numero di punti dell'altro colore sia ≥ 2. Allora non è possibile realizzare il percorso richiesto.

6. **Esempio 6: non staccare la penna dal foglio**. Questo esempio, anche se assomiglia al precedente, non c'entra molto con le colorazioni. Il problema consiste nel percorrere tutti i lati di un grafo senza saltare e senza percorrere lo stesso lato più di una volta. Si conta allora il numero di vertici dal quale parte un numero dispari di lati. Se tale numero è > 2, allora il percorso richiesto non è realizzabile.

Triangoli 5 – Altezze e ortocentro

In questa scheda utilizziamo le notazioni standard per gli elementi di un triangolo.

1. **Altezze**. Una *altezza* di un triangolo è una retta passante per un vertice e perpendicolare al lato opposto.

2. **Ortocentro**. Le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto H, detto *ortocentro* del triangolo (in inglese *orthocenter*).

3. **Posizione dell'ortocentro**. L'ortocentro si trova

   - triangolo acutangolo: all'interno del triangolo;
   - triangolo rettangolo: nel vertice dell'angolo retto;
   - triangolo ottusangolo: esterno al triangolo e contenuto nell'angolo opposto al vertice dell'angolo ottuso.

4. **Altezze e assi**. Ogni altezza è sempre parallela all'asse relativo allo stesso lato.

   Inoltre, se per ogni vertice del triangolo costruiamo la parallela al lato opposto, otteniamo un nuovo triangolo, con i lati lunghi il doppio di quelli del triangolo precedente. Le altezze del triangolo iniziale sono gli assi del nuovo triangolo.

5. **Lunghezza delle altezze**. Indichiamo con h_a, h_b, h_c, rispettivamente, la lunghezza delle altezze uscenti dai vertici A, B, C. Allora

$$\begin{aligned} h_a &= \frac{2S}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \\ h_b &= \frac{2S}{b} = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \\ h_c &= \frac{2S}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

6. **Circonferenza di Feuerbach**. In un triangolo consideriamo i seguenti nove punti: i piedi delle tre altezze, i punti medi dei tre lati, i punti medi dei tre segmenti che congiungono i vertici con l'ortocentro. Questi nove punti stanno tutti su una stessa circonferenza, detta *circonferenza di Feuerbach* o circonferenza dei nove punti.

7. **Proprietà della circonferenza di Feuerbach**. La circonferenza di Feuerbach

   - ha il centro nel punto medio del segmento che unisce l'ortocentro ed il circocentro;
   - ha raggio $R/2$;
   - è tangente alla circonferenza inscritta ed alle tre circonferenze ex-inscritte.

Trasformazioni del piano 4 – Inversione

In tutta la scheda indichiamo con Γ una circonferenza di centro O. Supponiamo inoltre di aver scelto le unità di misura in modo tale che il raggio di Γ sia 1.

1. **Definizione di inversione**. Indichiamo con i_Γ l'*inversione* rispetto a Γ, definita come l'applicazione che manda ogni punto $P \neq O$ del piano in un punto Q tale che
   - la retta OP coincide con la retta OQ, e P e Q stanno dalla stessa parte rispetto ad O;
   - $OQ = 1/OP$.

   In questo modo è ben definita l'immagine di tutti i punti $P \neq O$.

2. **Inversione in coordinate cartesiane**. Siano x e y coordinate nel piano messe in modo tale che il punto O coincida con l'origine e pertanto la circonferenza abbia equazione $x^2 + y^2 = 1$. Allora i_Γ si può rappresentare nella forma
$$(x, y) \to \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y).$$

3. **Inversione in coordinate polari**. Siano ρ e θ coordinate polari nel piano scelte in modo tale che il punto O coincida con l'origine e pertanto la circonferenza abbia equazione $\rho = 1$. Allora i_Γ si può rappresentare nella forma
$$(\rho, \theta) \to (1/\rho, \theta).$$

4. **Punti fissi**. I punti fissi di i_Γ sono tutti e soli i punti di Γ.

5. **Inversa**. L'inversione i_Γ è invertibile e la sua inversa è l'inversione i_Γ stessa. Pertanto applicando due volte un'inversione si ottiene l'identità.

6. **Dove finiscono?** Un'inversione manda
   - le rette passanti per O in se stesse (ma solo due punti restano fissi);
   - una retta r che non passa per O in una circonferenza passante per O, la cui tangente in O è parallela ad r;
   - il segmento AB in un altro segmento o in un arco di circonferenza, a seconda che il punto O appartenga o no alla retta AB;
   - circonferenze passanti per O in rette non passanti per O;
   - circonferenze non passanti per O in circonferenze non passanti per O (ma attenzione: in questo caso il centro non va in generale a finire nel centro!);
   - angoli formati da rette e circonferenze in angoli di uguale ampiezza (per angolo tra una retta ed una circonferenza si intende ovviamente l'angolo tra la retta e la tangente in un punto di incontro; stesso discorso per l'angolo tra due circonferenze).

7. **Cosa si conserva**. Un'inversione conserva
   - gli angoli.

8. **Cosa non si conserva**. Tutto il resto, in particolare le aree, le lunghezze, ed i relativi rapporti.

Congruenze fondamentali – Criteri di congruenza

In tutta questa scheda, quando si parla di cifre, si intendono quelle relative alla scrittura in base 10. Inoltre tutti gli interi che consideriamo in questa scheda sono da intendersi *positivi*.

1. **Criteri di congruenza**. Tali criteri servono per determinare a che cosa è congruo un intero fissato. Questi sono in particolare anche *criteri di divisibilità*, dal momento che a è divisibile per m se e solo se $a \equiv 0 \pmod{m}$.
   - **Modulo 2**. Un intero è congruo modulo 2 alla sua cifra delle unità.
   - **Modulo 3**. Un intero è congruo modulo 3 alla somma delle sue cifre.
   - **Modulo 4**. Un intero è congruo modulo 4 all'intero costituito dalla sue due cifre più a destra.
   - **Modulo 5**. Un intero è congruo modulo 5 alla sua cifra delle unità.
   - **Modulo 8**. Un intero è congruo modulo 8 all'intero costituito dalla sue tre cifre più a destra.
   - **Modulo 9**. Un intero è congruo modulo 9 alla somma delle sue cifre.
   - **Modulo 10**. Un intero è congruo modulo 10 alla sua cifra delle unità.
   - **Modulo 11**. Un intero è congruo modulo 11 alla somma a segno alterno delle sue cifre. I segni devono essere messi in modo che la cifra delle unità abbia segno positivo.

2. **Criterio di divisibilità per 7**. Un intero è divisibile per 7 se e solo se è divisibile per 7 l'intero costruito nel seguente modo: si prende l'intero iniziale privato della cifra delle unità e gli si sottrae due volte la cifra delle unità.

   Esempio: 294 è divisibile per 7 in quanto $29 - 2 \cdot 4$ è divisibile per 7. Nota bene: questo è un criterio di divisibilità ma non un criterio di congruenza!

3. **Congruenze fondamentali: residui quadratici**. Si dicono *residui quadratici* modulo m, le classi di congruenza modulo m dei quadrati perfetti. I seguenti sono solo alcuni esempi notevoli.
   - **Modulo 3**. I residui quadratici modulo 3 sono 0 e 1.
   - **Modulo 4**. I residui quadratici sono 0 e 1. In particolare, il quadrato di un intero pari è congruo a 0 modulo 4, mentre il quadrato di un intero dispari è congruo a 1 modulo 4.
   - **Modulo 5**. I residui quadratici modulo 5 sono 0, 1 e -1.
   - **Modulo 8**. I residui quadratici sono 0, 1 e 4. In particolare, il quadrato di un intero pari è congruo a 0 o 4 modulo 8, mentre il quadrato di un intero dispari è sempre congruo a 1 modulo 8.

4. **Congruenze fondamentali: quarte potenze modulo 16**. La quarta potenza di un intero pari è sempre congrua a 0 modulo 16. La quarta potenza di un intero dispari è sempre congrua a 1 modulo 16.

Preparazione alle gare

Come ci si prepara per le gare di selezione italiane? Lavorare! Lavorare! Lavorare! Il metodo migliore per prepararsi ad una determinata fase è quello di procurarsi i testi dei problemi assegnati per quella fase in tutte le passate edizioni (si trovano in internet oppure nei testi di preparazione olimpica) e iniziare a risolverli!

Se andando a vedere le soluzioni dovessero emergere strumenti sconosciuti, occorre consultare le schede per vedere di cosa si tratta ed orientarsi.

Come *non* ci si prepara per le IMO? Affrontando immediatamente i problemi assegnati alle precedenti edizioni: di solito il risultato è che non si riesce a risolverne quasi nessuno, e quando si va a leggere la soluzione non la si capisce in quanto invoca strumenti sconosciuti, oppure si commenta "a me non sarebbe mai venuta in mente".

Per fare un esempio sportivo: sarebbe come iniziare a preparsi per la maratona correndo una maratona!

Come ci si prepara per le IMO? Lavorare! Lavorare! Lavorare! Il tutto all'ennesima potenza rispetto alla fase nazionale (e soprattutto *dopo* aver completato il lavoro per la fase nazionale).

L'approccio è però opposto rispetto al caso nazionale, nel senso che ora conviene *prima* familiarizzare con le tecniche e *poi* giungere *per gradi* ai problemi IMO (vedi punto successivo).

Programma per un training completo Un possibile modo di procedere per gradi (da zero fino ai massimi livelli) è il seguente:

- Giochi di Archimede e gare provinciali Junior;
- Giochi di Archimede e gare provinciali Senior;
- prima infarinatura della teoria (circa metà delle schede, in modo da coprire i fondamentali di ogni argomento);
- gare nazionali italiane;
- studio completo della teoria (tutte le schede);
- gare di selezione americane (tipo AHSME e AIME);
- gare nazionali di paesi meno forti e vecchie edizioni delle gare nazionali di paesi forti (asia ed est europeo);
- problemi IMO delle edizioni meno recenti;
- problemi IMO recenti, shortlist, gare nazionali e locali di paesi forti;
- ulteriore approfondimento della teoria;
- se uno è arrivato fino a qui, non ha più bisogno di consigli!

È inutile ricordare che il completamento di un programma del genere richiede *anni* di lavoro (ma quale altro sport, svolto a livello internazionale, non lo richiederebbe?).

Come – Dove – Quando

Come e dove familiarizzare con le tecniche? La quasi totalità delle tecniche è descritta in queste Schede Olimpiche. Il modo migliore per familiarizzare con il contenuto sarebbe di seguire un corso (anche breve) in cui tale contenuto viene illustrato. A questo punto diventa facile proseguire anche da soli. *Si spera che l'esistenza di queste schede possa essere un aiuto ed uno stimolo all'organizzazione di corsi di questo tipo in molte sedi.*

In alternativa, si possono cercare dispense sui siti internet o nei testi consigliati, usando le schede come guida agli argomenti da cercare.

Dove trovare i problemi su cui allenarsi? Internet! Internet! Internet! Già soltanto nei siti indicati con i numeri [I1], [I2] e [I3], e nei testi indicati ai numeri [B1] e [B2] della bibliografia, ci sono più problemi di quanti uno riesca ad affrontarne in anni di lavoro. Non resta dunque che procurarseli e partire!

Ferma restando la necessità di procedere per gradi, è sicuramente utile anche

- *procedere tematicamente*, cioè per un periodo fare solo disuguaglianze, per un periodo solo teoria dei numeri, per un periodo solo funzioni, e così via;
- *riprendere periodicamente* anche i problemi già fatti: se di un problema non si ricorda più la soluzione, è come se non fosse mai stato svolto.

Come affrontare i problemi IMO? I problemi IMO (o shortlist) sono molto difficili, dunque non ci si possono aspettare soluzioni lampo.

Andare a vedere la soluzione prima di aver provato almeno tre volte, per almeno 150 minuti di seguito ogni volta, non ha alcun senso.

Prima di mollare occorre poi ripensare mentalmente a tutte le tecniche conosciute, a tutte le schede, a tutte le strategie euristiche, cercando di capire se si possono applicare nel caso in questione.

Come e quando usare le soluzioni? Ogni volta che si affronta un problema, di qualunque livello esso sia, è importante

- *non andare a vedere la soluzione* prima di avere provato con sufficiente intensità e continuità;
- *andare a vedere la soluzione* anche quando si è riusciti a risolvere il problema, perché comunque si possono vedere approcci diversi che potranno essere utili in futuro.

Dove procurarsi i testi? Per procurarsi dall'Italia la maggior parte dei testi segnalati in bibliografia, probabilmente il modo migliore (e talvolta l'unico) è di ordinarli (e pagarli) via internet. Nel terzo millennio questa è un'operazione normalissima!

Conoscere e superare la "fase critica" Dopo aver imparato la teoria, di solito si va incontro ad un periodo di "crisi di risultati". Infatti si è inconspevolmente indotti a pensare che una pura applicazione meccanica delle tecniche conosciute porti direttamente alla soluzione. Niente di più sbagliato! Nulla potrà mai sostituire l'ingegno, la fantasia, e l'"arte dell'arrangiarsi" con la quale si è partiti all'inizio. Semplicemente ora tali doti sono supportate da una solida base.

Scrivere una soluzione

Come si scrive una soluzione? Solo una lunga esperienza insegna a scrivere una soluzione con sufficiente *chiarezza* e *correttezza*. Tuttavia alcuni consigli possono essere utili.

- Dal punto di vista tipografico:
  - curare la calligrafia: una scrittura ordinata e sufficientemente grande aiuta decisamente il compito del lettore;
  - prestare particolare attenzione al fatto che le lettere usate per indicare punti o variabili siano chiaramente distinguibili le une dalle altre;
  - fare una figura in più piuttosto che una figura in meno;
  - non dimenticare troppo l'ortografia, la grammatica, la sintassi.
- Dal punto di vista della presentazione degli argomenti:
  - iniziare la soluzione enunciando chiaramente quello che si vuole dimostrare (così il lettore sa dove si vuole arrivare);
  - fare in modo che ogni passaggio sfrutti passaggi precedenti o risultati noti, e mai passaggi successivi;
  - suddividere dimostrazioni lunghe in vari passi autonomi (o lemmi): in tal caso ogni passo deve iniziare con l'enunciato chiaro di cosa si vuole dimostrare in quel passo;
  - se si usano varie formule conviene numerarle, in modo da poterle richiamare più agevolmente; stesso discordo per i passi ed i lemmi.
- Dal punto di vista matematico:
  - è ovvio che una risposta corretta senza dimostrazione (o con dimostrazione non corretta) ha un valore sostanzialmente nullo;
  - evitare i bluff (tipo saltare passaggi fondamentali asserendo che sono banali, utilizzare un teorema senza aver verificato tutte le ipotesi, utilizzare un teorema immaginario): in ambito olimpico non ci casca nessuno;
  - è meglio essere ridondanti piuttosto che succinti: nell'incertezza conviene dunque dimostrare quanto si sta usando (una buona norma è la seguente: i risultati contenuti in queste schede si possono dare per buoni, gli altri no);
  - quando si scrive una formula, bisogna "presentare tutte le lettere che vi sono contenute": se ad esempio per una funzione f si scrive che $f(x+y) = xf(y)$ deve essere chiaro chi sono x e y, cioè se la formula deve valere per ogni valore di x e y (appartenenti a che cosa?) o solo per valori ben specifici (di solito i quantificatori servono proprio a chiarire queste cose!).

Come si impara a scrivere una soluzione? Facendolo tante volte, e non in condizione da gara. Un utile esercizio consiste nello scrivere per bene la soluzione di qualche problema che si è risolto, cercando, senza problemi di tempo, di farlo il meglio possibile. La soluzione scritta andrebbe poi fatta controllare a qualche collega (si impara tantissimo leggendo le soluzioni scritte da altri), ed infine a qualcuno con "esperienza olimpica".

Capitolo 6

Bibliografia

Siti internet di interesse olimpico

[I1] **URL**: `http://olimpiadi.ing.unipi.it`

Gestore: Marcello Villani **Lingua**: Italiano

Descrizione. È il sito ufficiale delle Olimpiadi di Matematica Italiane. Ci sono tutte le informazioni riguardanti le varie fasi di selezione, i testi e le soluzioni delle vecchie edizioni, un forum di discussione, un giornalino informatico con problemi di allenamento e molto altro.

[I2] **URL**: `http://www.mathlinks.ro`

Gestore: Valentin Vornicu **Lingua**: Inglese

Descrizione. È il sito frequentato dalla maggior parte di coloro che aspirano, in tutto il mondo, a partecipare ad una IMO. Sul forum si può trovare di tutto, dai problemi delle gare nazionali di altri paesi, fino a problemi tuttora irrisolti. Il livello è decisamente alto e può spaventare all'inizio, ma è quello delle IMO di oggi.

[I3] **URL**: `http://www.kalva.demon.co.uk/`

Gestore: John Scholes **Lingua**: Inglese

Descrizione. Questo sito contiene molte raccolte di problemi, maniacalmente complete. In particolare, ci sono

- i testi e le soluzioni di *tutti* i problemi assegnati alle IMO, dal 1959 ad oggi;
- i testi (e talvolta anche le soluzioni) delle shortlist degli ultimi anni;
- i testi (e talvolta anche le soluzioni) dei problemi di alcune delle migliori gare matematiche nazionali e locali.

[I4] **URL**: `http://www.unl.edu/amc`

Gestore: Kiran Kedlaya **Lingua**: Inglese

Descrizione. Sito ufficiale della AMC (American Mathematical Competitions), che cura la partecipazione americana alle olimpiadi di matematica, dalle gare nelle scuole alle IMO. Particolarmente interessanti sono le sezioni

- *resources*, con ottimo materiale e suggerimenti per il training;
- *problems*, con le raccolte dei problemi assegnati alle varie fasi di selezione;
- *publications*, dove è possibile ordinare (ovviamente pagando!) le pubblicazioni edite dalla AMC e dalla MAA (Mathematical Association of America), tra cui quelle contenenti i problemi assegnati alle gare nazionali di vari paesi.

[I5] **URL**: `http://matholymp.com/`

Gestore: Arkadii Slinko **Lingua**: Inglese

Descrizione. Il sito è curato dall'ex Team Leader della nazionale neozelandese. Contiene esercizi sparsi, training sessions, dispense molto chiare su vari argomenti, un elenco di libri e link utili. Varie volte durante l'anno compare nel sito una "olimpiade del mese", con problemi di livello IMO.

[I6] **URL**: `http://www.cut-the-knot.com`

Gestore: Alexander Bogomolny **Lingua**: Inglese

Descrizione. Un sito vastissimo, con molti spunti interessanti sulla matematica in genere. Vi si trovano giochi, paradossi, enigmi, problemi, lezioni su svariati argomenti, simulazioni al calcolatore, discussioni, curiosità, aneddoti.

[I7] **URL**: `http://olympiads.win.tue.nl/imo/`

Gestore: Eindhoven University of Technology **Lingua**: Inglese

Descrizione. È un sito molto vasto e contiene tra le altre cose molti link a siti ufficiali di gare di matematica sparse per il mondo, archivi di problemi, riviste specializzate, forum di matematica.

Per una più agevole navigazione segnaliamo le seguenti sottopagine o link.

- `http://olympiads.win.tue.nl/imo/books.html`
  Contiene un elenco di libri utili per prepararsi alle Olimpiadi e libri di divulgazione matematica che si posso acquistare in rete.
- `http://madvax.maths.uwa.edu.au/~gregg/Olympiad/`
  Un sito con dispense in inglese su argomenti da IMO.
- `http://problems.math.umr.edu/index.htm`
  Probabilmente l'archivio più completo di problemi di matematica che si possa trovare in rete, catalogati in modo tale da rendere possibile rintracciarli digitando parole del testo.
- `http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/4661/`
  Il sito che dice di contenere i problemi più difficili della rete.

[I8] **URL**: `http://donut.math.toronto.edu/~naoki/math.html`

Gestore: Naoki Sato **Lingua**: Inglese

Descrizione. Probabilmente è il sito più completo riguardo ad archivi di problemi. Contiene anche molti altri link sulla matematica in generale.

[I9] **URL**: `http://komal.elte.hu/info/bemutatkozas.e.shtml`

Gestore: Ministero Ungherese dell'educazione **Lingua**: Inglese

Descrizione. Sito inglese della rivista KöMaL. Il KöMaL è un periodico ungherese fondato più di cento anni fa, che contiene articoli e problemi di matematica ed è pensato per ragazzi delle scuole superiori. Il nucleo della rivista è dato dai problemi che vengono periodicamente proposti ai lettori: questi ultimi possono partecipare attivamente spedendo le loro soluzioni alla redazione, che si fa carico di pubblicare le migliori e di stilare una classifica dei solutori. Il sito in questione riporta i problemi proposti dall'ultimo numero e le soluzioni del penultimo. Qualsiasi studente di qualsiasi nazionalità può partecipare mandando le soluzioni (in inglese o in ungherese!) via e-mail o per posta ordinaria. Il sito stesso contiene le informazioni utili e le istruzioni per partecipare.

[I10] **URL**: `http://imo.math.ca/`

Gestore: ? **Lingua**: Inglese

Descrizione. Un sito molto semplice con informazioni sulle IMO, link ai siti delle ultime edizioni disputate ed ai siti ufficiali di alcune competizioni nazionali.

Libri di problemi di tipo olimpico

[B1] **Libri delle Olimpiadi Italiane di Matematica** **Lingua**: Italiano

- F. Conti, M. Barsanti, T. Franzoni; *Le Olimpiadi della Matematica – Problemi dalle gare italiane*; Zanichelli, 1994.
- F. Conti, M. Barsanti, C. De Lellis, T. Franzoni; *Le Olimpiadi della Matematica – Problemi dalle gare italiane*; Zanichelli, 2002.

Descrizione. Questi volumi contengono testi e soluzioni di tutti i problemi assegnati alle varie fasi delle gare italiane di matematica ed alcuni dei problemi dello stage di allenamento di Cortona (il primo copre le annate dal 1988 al 1994, il secondo quelle dal 1995 al 2001). I problemi sono suddivisi prima per argomento e poi, all'interno di ogni argomento, per livello di difficoltà. Si tratta di testi fondamentali per un training di base per chi si prepara ad affrontare le varie fasi della selezione italiana.

[B2] **Libri di problemi di gare nazionali** **Lingua**: Inglese

- *Mathematical Contests 1995–96*, *1996–97*, *1997–98*, tre libri editi dalla "American Mathematical Competitions";
- *Mathematical Olympiads 1998-99*, e *successivi*, editi da "The Mathematical Association of America".

Descrizione. Raggruppano gare nazionali di moltissimi paesi, con difficoltà ovviamente molto differenziate. Possono servire sia al completamento di una formazione "di base" per un candidato alle Olimpiadi, sia per un training di livello molto elevato. Consigliatissimi ed usatissimi nella preparazione di decine di squadre olimpiche.

[B3] **Libri di introduzione al problem solving** **Lingua**: Inglese

- Loren C. Larson; *Problem-Solving Through Problems*; Springer New York, 1983;
- Arthur Engel; *Problem-solving strategies*; Springer New York, 1998.

Descrizione. Contengono una formidabile raccolta di tecniche di risoluzione di problemi, illustrate attraverso esempi tratti da gare matematiche di livello internazionale. Il primo va anche oltre il programma olimpico, per cui circa il venti per cento del contenuto si può apprezzare soltanto dopo un breve corso che tratti le basi del calcolo differenziale ed integrale.

[B4] **Autori**: A. Gardiner **Lingua**: Inglese

Titolo: *The Mathematical Olympiad Book (An introduction to problem solving)*

Editore: Oxford Science Publications

Descrizione. Raccolta di problemi delle olimpiadi britanniche. I problemi sono di media difficoltà. La lettura è particolarmente interessante perché permette di misurarsi a diversi livelli e vi si trovano dei suggerimenti graduali per risolvere i problemi più impegnativi. Si può anche imparare molto sul metodo di approccio ai problemi.

[B5] **Autori**: Marcin E. Kuczma **Lingua**: Inglese

Titolo: *144 Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition*

Editore: The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland

Descrizione. Problemi piuttosto impegnativi, degni di una seria preparazione olimpica, utilizzati nella prestigiosa gara annuale austro-polacca. Molti dei problemi sono anche esteticamente attraenti e sono illustrati con dovizia di particolari da un "espertissimo" di olimpiadi quale M. Kuczma.

[B6] **Autori**: Edward Barbeau, Murray S. Klamkin, William O.J. Moser **Lingua**: Inglese

Titolo: *Five Hundred Mathematical Challenges*

Editore: The Mathematical Association of America

Descrizione. È una raccolta tra le più ricche di problemi di difficoltà non elevatissima. Ben cinquecento esempi di problemi usati negli USA, con ricchezza di argomenti, diverse soluzioni ed amplissimo spettro.

[B7] **Autori**: Leo J. Schneider **Lingua**: Inglese

Titolo: *The Contest Problem Book I – VI*

Editore: The Mathematical Association of America

Descrizione. Si tratta di sei volumi che raccolgono i problemi usati negli USA per le prime fasi di selezione. Sono problemi di livello appena superiore ai problemi delle nostre gare provinciali, ma che rispetto ai nostri coprono uno spettro più ampio di argomenti olimpici. Adatti per il completamento di una preparazione di base.

[B8] **Autori**: vari **Lingua**: inglese

Titolo: *C2K Century 2 of KöMaL*

Editore: Roland Eötvös Physical Society, Budapest, 1999

Descrizione. Questo testo contiene una raccolta di oltre 800 problemi pubblicati sulla rivista ungherese KöMaL, rivolta alle scuole superiori. I problemi, alcuni originali, altri tratti da gare matematiche internazionali, sono di livello variabile a seconda dell'età degli studenti a cui si rivolgono. Tuttavia occorre tenere presente che le indicazioni di età rispecchiano lo standard ungherese piuttosto che quello italiano. In particolare, molti dei problemi della categoria 17–18 anni richiedono conoscenze che in Italia si acquisiscono solo nei primi anni di università.

[B9] **Autori**: A.M. Yaglom and I.M. Yaglom **Lingua**: Inglese

Titolo: *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, suddiviso in

Vol I – *Combinatorial Analysis and Probability Theory*;

Vol II – *Problems from Various Branches of Mathematics.*

Editore: Dover Publications, Inc. - New York

Descrizione. Si tratta di testi molto classici, che ripercorrono lo stile della preparazione dei ragazzi alle Olimpiadi al tempo dell'Unione Sovietica. Contengono alcuni esempi di grande interesse, e comunque un notevolissimo spettro di idee basilari. Problemi impegnativi, ma non particolarmente sofisticati.

[B10] **Problemi di selezione per scuole di eccellenza.** **Lingua**: Italiano

- F. Conti e altri; *I problemi di matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa*; Boringhieri 1985.
- F. Conti, A. Profeti; *I problemi di matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa*; Boringhieri 1998.
- Bassani, Foa, Pegoraro; *Problemi di Fisica della Scuola Normale*; Zanichelli (prima ed. 1984, seconda ed. 2000).
- G. Torrigiani, S. Francaviglia, T. Franzoni; *Problemi di matematica*; Zanichelli, Bologna.

Descrizione. Contengono testi e soluzioni dei problemi assegnati all'esame di ammissione alla Scuola Normale Superiore di Pisa (il primo dal 1906 al 1984, il secondo dal 1985 al 1997, con una selezione di problemi tratti dal volume precedente) ed alla Scuola Sant'Anna di Pisa. Adatti ovviamente a chi si appresta ad affrontare i concorsi per queste scuole di eccellenza, offrono tuttavia molti spunti di natura "olimpica".